



THÈSE

présentée pour obtenir

le grade de **Docteur en Sciences** de l'Université de Marne la Vallée

Spécialité : Traitement du Signal

par

Pascal BIANCHI

## Démodulation aveugle de modulations non linéaires à phase continue

Composition de la commission d'examen :

Président :	Pierre DUHAMEL
Rapporteurs :	Pierre COMON Phillip REGALIA
Examineurs :	Christophe LE MARTRET Georges TANTOT
Directeur de Thèse :	Philippe LOUBATON
Co-Directeur :	François SIRVEN

## Remerciements

Ma première pensée s'adresse tout naturellement à mon directeur de thèse, Monsieur Philippe Loubaton. La qualité de son encadrement ainsi que son exceptionnelle disponibilité m'ont été très précieuses tout au long de ces trois années.

Je tiens ensuite à remercier mon co-directeur de thèse, Monsieur François Sirven pour sa clairvoyance. Je lui suis en outre très reconnaissant pour sa persévérance face aux nombreux obstacles administratifs auxquels nous nous sommes heurtés lors de cette thèse.

Je souhaite également exprimer toute ma gratitude à Monsieur Georges Tantot pour ses conseils et pour l'intérêt avec lequel il a suivi ces travaux. Je remercie tous les membres du jury et tout particulièrement mes deux rapporteurs, Messieurs Pierre Comon et Phillip Regalia.

Je tiens également à remercier tous les membres de l'Équipe Signal pour les Communications de l'université de Marne-la-Vallée. Leur bonne humeur m'a permis de mener cette thèse dans des conditions idéales.

Je ne peux pas non plus oublier le soutien permanent que m'ont apporté ma famille ainsi que mes plus proches amis. Enfin, je tiens à remercier Sara pour avoir fait preuve de tant de patience et de bienveillance.

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
1.1	Contexte et objectifs de la thèse . . . . .	5
1.2	Organisation du document . . . . .	5
1.3	Publications . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Présentation des modulations CPM et des démodulateurs</b>	<b>9</b>
2.1	Présentation des modulations CPM . . . . .	9
2.1.1	Modèle de signal . . . . .	9
2.1.2	Les différentes classes de modulations CPM . . . . .	10
2.1.3	Représentation de Laurent . . . . .	11
2.2	Démodulateurs . . . . .	14
2.2.1	Problématique et présentation générale . . . . .	14
2.2.2	Démodulation cohérente : algorithme de Viterbi . . . . .	15
2.2.3	Démodulation non cohérente symbole par symbole . . . . .	19
2.3	Simulations . . . . .	20
2.3.1	Paramètres utilisés dans les simulations . . . . .	20
2.3.2	Performances dans le cas où les paramètres techniques sont connus .	21
2.3.3	Performances dans le cas où le filtre de mise en forme est inconnu .	23
<b>3</b>	<b>Égalisation aveugle de modulations CPM</b>	<b>25</b>
3.1	Problématique et plan du chapitre . . . . .	25
3.1.1	Introduction . . . . .	25
3.1.2	Modèle de signaux . . . . .	26
3.1.3	Généralités sur la compensation aveugle du canal de transmission . .	26
3.1.4	Organisation du chapitre . . . . .	28
3.2	Revue des méthodes proposées dans la littérature . . . . .	29
3.2.1	Identification aveugle par maximisation de la vraisemblance . . . . .	29
3.2.2	Autres méthodes existantes . . . . .	32
3.3	Égalisation aveugle par le critère du module constant . . . . .	32
3.3.1	Présentation du critère du module constant . . . . .	32
3.3.2	Résultat classique pour une modulation linéaire d'une suite i.i.d. circulaire . . . . .	34
3.3.3	Cadre théorique de l'égalisation dans le cas de modulations CPM . .	35
3.3.4	Caractérisation des solutions : cadre théorique et approche retenue .	36
3.4	Cas des CPM à réponse complète ( $L = 1$ ) . . . . .	37
3.4.1	Représentation de Laurent et formulation du problème . . . . .	38
3.4.2	Cas d'un échantillonnage à la période symbole . . . . .	39
3.4.3	Cas d'une période d'échantillonnage quelconque . . . . .	44

3.5	Cas des CPM à réponse partielle ( $L > 1$ ) . . . . .	47
3.5.1	Représentation de Laurent et formulation du problème . . . . .	47
3.5.2	Cas d'un échantillonnage à la période symbole . . . . .	49
3.5.3	Cas d'une période d'échantillonnage quelconque . . . . .	56
3.6	Présence d'un résidu de fréquence porteuse . . . . .	56
3.7	Simulations . . . . .	58
3.8	Conclusion . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Une application à l'estimation de la période symbole</b>	<b>67</b>
4.1	Problématique . . . . .	67
4.2	Modèle de signaux . . . . .	68
4.3	Estimation par détection de fréquences cycliques . . . . .	68
4.3.1	Principe . . . . .	68
4.3.2	Utilisation de la fréquence instantanée . . . . .	69
4.3.3	Estimation de la fréquence instantanée . . . . .	70
4.3.4	Méthode d'estimation de $T_s$ . . . . .	71
4.4	Estimation par le critère du module constant . . . . .	72
4.4.1	Résultat fondamental . . . . .	73
4.4.2	Procédure d'estimation . . . . .	76
4.4.3	Complémentarité de la méthode proposée et des méthodes cycliques	77
4.5	Simulations . . . . .	77
4.5.1	Contextes de simulation . . . . .	77
4.5.2	Méthode cyclique . . . . .	78
4.5.3	Méthode basée sur le critère du module constant . . . . .	79
4.6	Conclusion . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Estimation aveugle de l'indice de modulation</b>	<b>81</b>
5.1	Problématique et plan du chapitre . . . . .	81
5.2	Modèle de signal . . . . .	83
5.3	Revue des estimateurs existants . . . . .	84
5.3.1	Estimation par le critère du maximum de vraisemblance . . . . .	84
5.3.2	Estimation basée sur les statistiques d'ordre supérieur . . . . .	86
5.4	Estimateur proposé . . . . .	86
5.4.1	Une propriété cyclique des signaux CPM . . . . .	86
5.4.2	Estimateur proposé . . . . .	87
5.4.3	Cas où la période symbole et le résidu de porteuse sont inconnus . .	89
5.5	Analyse asymptotique de l'estimateur proposé . . . . .	90
5.5.1	Le cas non bruité . . . . .	91
5.5.2	Le cas bruité . . . . .	96
5.6	Simulations et performances . . . . .	98
5.6.1	Comparaison aux résultats empiriques . . . . .	98
5.6.2	Performances asymptotiques . . . . .	100
5.6.3	Comparaison à un estimateur basé sur les statistiques d'ordre supérieur	101
<b>6</b>	<b>Mise en œuvre de la chaîne complète</b>	<b>105</b>
6.1	Caractéristiques de la chaîne de transmission considérée . . . . .	105
6.1.1	Paramètres utilisés à l'émission, canal et bruit additif . . . . .	105
6.1.2	Réception du signal . . . . .	106

6.1.3	Algorithme du module constant . . . . .	106
6.1.4	Estimation des paramètres techniques . . . . .	106
6.1.5	Synchronisation en temps et en phase - Démodulation . . . . .	107
6.1.6	Estimation de la fonction de mise en forme . . . . .	107
6.2	Simulations . . . . .	109
<b>Conclusion</b>		<b>113</b>
<b>Annexes</b>		<b>115</b>
<b>A</b>	<b>Article publié dans les actes de GLOBECOM 2003</b>	<b>117</b>
A.1	Introduction . . . . .	118
A.2	The proposed estimate . . . . .	120
A.2.1	A cyclic property of CPM signals . . . . .	120
A.2.2	Presentation of the proposed estimate . . . . .	121
A.2.3	Practical implementation . . . . .	122
A.3	Asymptotic analysis of the proposed estimate . . . . .	123
A.3.1	The noiseless case . . . . .	123
A.3.2	The noisy case . . . . .	126
A.4	Simulations and results . . . . .	127
<b>B</b>	<b>Annexe relative au chapitre 3</b>	<b>129</b>
B.1	Preuve de la proposition 3.1 . . . . .	129
B.2	CPM à réponse complète : preuve du Résultat 3.2 . . . . .	130
B.3	CPM à réponse partielle : preuve du Résultat 3.4 . . . . .	139
B.4	Preuve du corollaire 3.1 . . . . .	154
B.5	Preuve du lemme 3.1 . . . . .	157
B.6	Preuve de la proposition 3.4 . . . . .	158
B.7	Preuve de la proposition 3.5 . . . . .	161
<b>C</b>	<b>Annexe relative au chapitre 4</b>	<b>163</b>
<b>D</b>	<b>Annexe relative au chapitre 5</b>	<b>167</b>
D.1	Preuve de la proposition 5.2 . . . . .	167
D.2	Preuve du lemme 5.1 . . . . .	167
D.3	Preuve du lemme 5.2 . . . . .	170
D.4	Preuve de la proposition 5.4 . . . . .	172



---

# Chapitre 1

## Introduction générale

### 1.1 Contexte et objectifs de la thèse

Cette thèse a été financée par le biais d'une allocation DGA-CNRS.

Ce travail de thèse concerne le problème de la démodulation aveugle des modulations de fréquence à phase continue ou modulations CPM (Continuous Phase Modulations). Nous partons de l'hypothèse qu'un signal produit par un émetteur inconnu utilisant une modulation CPM, est intercepté. L'objectif est de définir et d'étudier des techniques permettant d'extraire les symboles d'information, supposés binaires, à partir du signal reçu. Nous nous plaçons dans un contexte non coopératif, ce qui suppose que les traitements effectués par le récepteur doivent pouvoir fonctionner en dépit d'une connaissance très restreinte des caractéristiques de l'émetteur.

Le signal en bande étroite intercepté est ramené en bande de base (toutefois, un résidu de fréquence porteuse inconnu subsiste inévitablement). Afin de pouvoir extraire les symboles transmis par le signal, il est auparavant nécessaire de :

1. compenser en aveugle l'effet d'un éventuel canal de propagation à trajets multiples ;
2. estimer les paramètres caractéristiques de la modulation CPM utilisée par l'émetteur (à savoir la période symbole, l'indice de modulation, et le filtre de mise en forme), ainsi que la valeur du résidu de fréquence porteuse.

Dans le contexte de signaux plus classiques modulés linéairement, l'ordre dans lequel ces diverses opérations sont effectuées peut être variable. Par contre, dans le cas de modulations CPM d'indice inconnu, une analyse rapide du problème spécifique de l'estimation de l'indice de modulation montre qu'il est préférable d'avoir compensé le canal afin d'estimer ce paramètre important. Par conséquent, l'architecture de la chaîne de réception que nous avons étudiée peut être représentée par le schéma de la figure 1.1.

### 1.2 Organisation du document

Après un chapitre introductif destiné à présenter les modulations CPM et les démodulateurs les plus conventionnels (chapitre 2), nous étudions au chapitre 3 le problème de la compensation *aveugle* du canal de propagation, c'est à dire dans le cas où aucune séquence d'apprentissage n'est disponible et où les paramètres techniques de la modulation sont inconnus. Compte tenu de ce contexte particulier et du fait que les signaux CPM

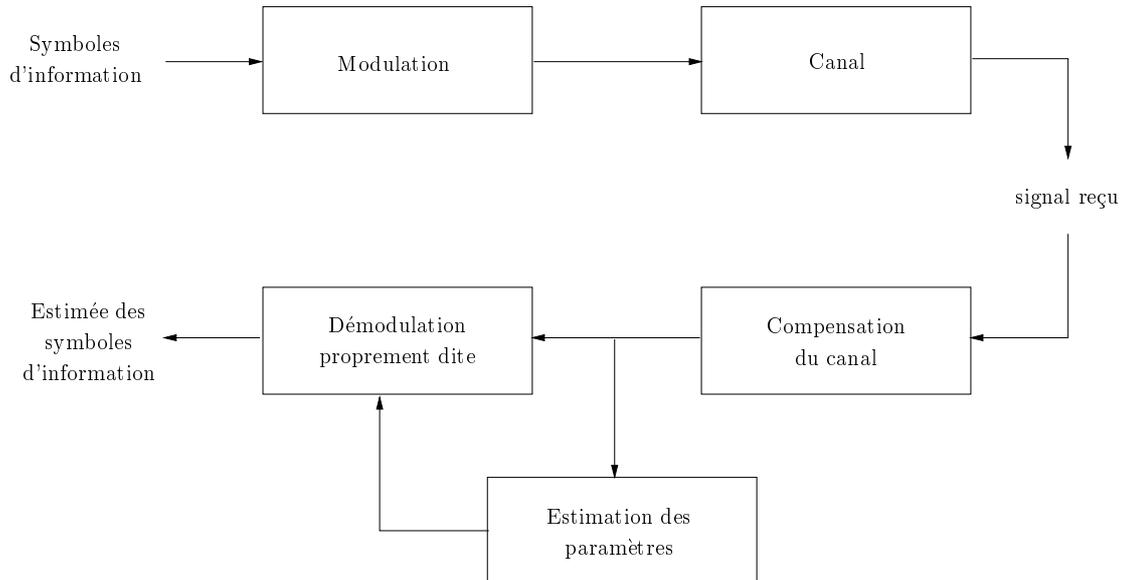


FIG. 1.1 – Schéma synoptique de la chaîne de transmission

sont de module constant, la solution que nous avons retenue consiste à appliquer au signal reçu un filtre égaliseur déterminé de manière aveugle par minimisation du critère du module constant proposé par Godard [1]. Bien que les propriétés de cet égaliseur aient été abondamment étudiées dans le cas de signaux modulés linéairement, il n'existe à notre connaissance aucun travaux ayant abouti à des résultats probants dans le contexte des signaux CPM. L'objet du chapitre 3 est donc d'étudier les minima globaux du critère du module constant lorsqu'une modulation CPM est émise. Le résultat essentiel de ce chapitre est la mise en évidence de solutions indésirables que nous parvenons à caractériser complètement dans le cas des signaux CPM à réponse complète, et partiellement dans le cas contraire.

Au chapitre 4 nous nous intéressons au problème de l'estimation aveugle de la période symbole du signal CPM transmis. Comme dans le cas des modulations linéaires, la solution la plus simple consiste à remarquer que le débit symbole du signal coïncide avec la plus petite fréquence cyclique strictement positive du signal reçu, ou d'une fonction du signal reçu. Toutefois, cette approche est susceptible de conduire à des résultats désastreux dans le cas où l'excès de bande du signal est réduit, et où la durée d'observation est faible. Une méthode alternative a été proposée par [2], [3] dans le cas de modulations linéaires. Les résultats du chapitre 3 nous permettent d'étendre cette approche au cas de modulations CPM. Le chapitre 5 aborde le problème de l'estimation aveugle de l'indice de modulation  $h$ . Il s'agit d'une question qui ne se pose pas dans le cas des modulations linéaires, et qui n'a fait l'objet que d'un très petit nombre de travaux. Nous présentons dans le chapitre 5 un nouvel estimateur basé sur l'observation que, lorsque l'on élève un signal CPM à la puissance (non entière en général)  $\frac{1}{h}$ , alors le signal correspondant contient une composante déterministe sinusoïdale de fréquence  $\frac{1}{2T_s}$  où  $T_s$  représente la période symbole. Nous commençons par étudier les propriétés de cet estimateur dans le cas où la période

symbole et le résidu de porteuse ont été estimés au préalable, et montrons grâce à une analyse asymptotique, que la variance de l'estimateur est proportionnelle à  $\frac{1}{N^2}$ , où  $N$  est le nombre de symboles observés. Il s'agit d'une vitesse de convergence deux fois plus rapide que celle des estimateurs déjà publiés. L'annexe A montre comment on peut utiliser le même type de technique pour estimer conjointement la période symbole, l'indice et le résidu de porteuse. Enfin, au chapitre 6, nous étudions par simulation les performances de la chaîne complète de démodulation aveugle représentée par la figure 1.1.

### 1.3 Publications

Les travaux effectués ont fait l'objet des publications suivantes :

#### Articles de revue :

- r1- P. Bianchi, Ph. Loubaton et F.Sirven. *Non data aided estimation of the modulation index of continuous phase modulations*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 52, no. 10, pp. 2847-2861, October 2004.
- r2- P. Bianchi, Ph. Loubaton et F.Sirven. *On the blind estimation of the technical parameters of continuous phase modulated signals*, à paraître dans IEEE Journal on Selected areas on Communications, Special issue on wireless advances in military communications.

#### Articles de conférence :

- c1- P. Bianchi, Ph. Loubaton et F.Sirven. *A non data aided estimator of the modulation index of continuous phase modulations*, Actes de la conférence ICASSP, Orlando, États-Unis, 2002.
- c2- P. Bianchi, Ph. Loubaton et F.Sirven. *On the Blind Equalization of Continuous Phase Modulation Using a Constant Modulus Criterion*, Actes de la conférence SPAWC, Rome, Italie, 2003.
- c3- P. Bianchi, Ph. Loubaton et F.Sirven. *Estimation aveugle du débit symbole de modulations CPM*, Actes de la conférence GRETSI, Paris, France, 2003.
- c4- P. Bianchi, Ph. Loubaton et F.Sirven. *Blind joint estimation of the technical parameters of continuous phase modulated signals*, Actes du Communication Theory Workshop de la conférence Globecom, San Francisco, États-Unis, 2003.



---

## Chapitre 2

# Présentation des modulations CPM et des démodulateurs

Dans ce chapitre, nous introduisons les modulations non linéaires à phase continue et présentons le modèle de signal utilisé dans toute la suite. En second lieu, nous décrivons les démodulateurs usuels permettant d'estimer les données transmises à partir d'une version bruitée du signal émis, lorsque les paramètres techniques sont supposés connus.

### 2.1 Présentation des modulations CPM

Les modulations à phase continue, encore appelées modulations CPM (Continuous Phase Modulations), présentent des propriétés qui les rendent particulièrement intéressantes dans le domaine des communications numériques satellitaires et terrestres. Leur principal avantage est sans aucun doute leur propriété d'enveloppe constante. De plus, les modulations CPM représentent un bon compromis entre efficacité de puissance et complexité des modulateurs et démodulateurs. Enfin, elles présentent une efficacité spectrale très attrayante. L'appellation "modulations CPM" désigne un large ensemble de modulations qui diffèrent entre elles par le type de filtre de mise en forme utilisé à l'émission. Historiquement, les modulations CPM ont été popularisées au début des années 80 par [4], [5], [6] et [7], bien qu'un certain nombre de modulations relevant des CPM (telles que les modulations CPFSK, Continuous Phase Frequency Shift Keying) étaient déjà répandues auparavant.

#### 2.1.1 Modèle de signal

L'enveloppe complexe  $s_a(t)$  d'un signal CPM s'écrit de la manière suivante :

$$s_a(t) = \exp i\psi_a(t). \quad (2.1)$$

$s_a(t)$  est donc de module constant et sa phase  $\psi_a(t)$  est donnée par :

$$\psi_a(t) = \pi h \int_{-\infty}^t \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j g_a(u - jT_s) du. \quad (2.2)$$

Dans l'expression ci-dessus,  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite indépendante et identiquement distribuée (i.i.d.) qui représente la séquence des symboles émis. Nous supposons dans ce document

que chaque symbole  $a_n$  prend de manière équiprobable ses valeurs dans l'alphabet binaire  $\{-1, +1\}$ .  $T_s$  représente la période symbole. Le paramètre  $h$  est appelé l'**indice de modulation**.  $h$  est habituellement compris entre 0 et 2 et nous supposons de plus que  $h$  est différent de 1. La fonction  $g_a(t)$ , habituellement appelée le filtre de mise en forme, est continue, positive, et a pour support l'intervalle de temps  $[0, LT_s]$ , où  $L$  est un entier strictement positif que nous appellerons la longueur du filtre de mise en forme. De plus,  $g_a(t)$  est normalisée de telle sorte que  $\int_0^{LT_s} g_a(t) dt = 1$ .

L'expression (2.2) peut être simplifiée en faisant intervenir une primitive du filtre de mise en forme. Soit  $\phi_a(t)$  la fonction définie pour tout  $t$  par  $\phi_a(t) = \int_{-\infty}^t g_a(u) du$ . La phase  $\psi_a(t)$  du signal  $s_a(t)$  s'exprime en fonction de  $\phi_a(t)$  de la manière suivante :

$$\psi_a(t) = \pi h \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \phi_a(t - jT_s). \quad (2.3)$$

En utilisant les propriétés du filtre de mise en forme  $g_a(t)$ , il apparaît clairement que  $\phi_a(t)$  est une fonction continue, croissante, et telle que :

- $\phi_a(t) = 0$  pour  $t < 0$ ,
- $\phi_a(t) \in [0, 1]$  pour  $0 \leq t \leq LT_s$ ,
- $\phi_a(t) = 1$  pour  $t > LT_s$ .

Ces propriétés permettent de réécrire l'expression (2.3) de la phase  $\psi_a(t)$ . En effet, pour tout  $t$  appartenant à l'intervalle  $[nT_s, (n+1)T_s[$ , le coefficient  $\phi_a(t - jT_s)$  est nul pour  $j \geq n+1$ . Inversement,  $\phi_a(t - jT_s)$  est égal à 1 pour  $j \leq n-L$ . En utilisant ces remarques, on constate que  $s_a(t)$  vérifie l'égalité suivante (qui sera utilisée à de nombreuses reprises dans la suite) : pour tout  $t \in [nT_s, (n+1)T_s[$ ,

$$s_a(t) = \exp \left( i\pi h \left[ \sum_{k=-\infty}^{n-L} a_k + \sum_{k=0}^{L-1} \phi_a(t - kT_s) a_{n-k} \right] \right). \quad (2.4)$$

On s'aperçoit en particulier que chaque symbole provoque une variation de la phase égale à  $\pm\pi h$ .

**Remarque 2.1 :** Dans le modèle précédent, les symboles  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sont supposés binaires. Dans le cas où les symboles émis appartiennent à un alphabet  $M$ -aire  $\mathcal{V} = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)$ , où  $M$  est entier, alors la variation de phase induite par un symbole est égale à  $\pm\pi h, \pm 3\pi h, \dots$ , ou  $\pm(M-1)\pi h$ . Bien que la plus grande partie des techniques décrites dans ce document soient généralisables au cas de CPM à plus de deux états, nous nous limiterons dans ce document à l'étude des modulations CPM binaires.

### 2.1.2 Les différentes classes de modulations CPM

Différents types de filtres de mise en forme et différentes valeurs de l'indice de modulation  $h$  sont susceptibles d'être utilisés en pratique, ce qui implique l'existence d'une grande diversité de modulations CPM.

**Définition 2.1 :** On parle de CPM à **réponse complète** lorsque la longueur  $L$  du filtre de mise en forme est égale à  $L = 1$ , autrement dit lorsque le support de  $g_a(t)$  coïncide avec l'intervalle  $[0, T_s]$ . Inversement, on parle de CPM à **réponse partielle** lorsque  $L > 1$ .

On distingue ensuite différentes classes de modulations CPM selon la forme d'onde de la fonction  $g_a(t)$  utilisée. Une revue des familles de modulations CPM employées en

pratique est disponible dans [5], [8] et [9]. Afin d'illustrer les résultats exposés dans le présent document, nous utiliserons dans la suite deux types de modulations particulièrement répandues :

– **Modulations LREC**<sup>1</sup>.

Le filtre de mise en forme  $g_a(t)$  est la fonction rectangle définie par :

$$g_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{LT_s}, & \text{pour } 0 \leq t \leq LT_s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, les modulations 1REC, plus connues sous le nom de CPFSK (Continuous Phase Frequency Shift Keying), sont utilisées dans de nombreux systèmes de communication. Si, en outre, l'indice de modulation est égal à  $h = \frac{1}{2}$ , on parle de modulation MSK (Minimum Shift Keying).

– **Modulations LRC**

Le filtre de mise en forme  $g_a(t)$  est une fonction en cosinus surélevé (Raised Cosine) :

$$g_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{LT_s} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi t}{LT_s} \right) \right), & \text{pour } 0 \leq t \leq LT_s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que d'autres types de modulations CPM sont susceptibles d'être utilisés en pratique. Nous nous contentons ici de citer les modulations LSRC (Spectrally Raised Cosine), TFM (Tamed Frequency Modulation), et la modulation GMSK (Gaussian Minimum Shift Keying), utilisée quant à elle dans le système de téléphonie mobile européen de deuxième génération (GSM).

**Remarque 2.2 :** *Dans le modèle de signal décrit au début de ce chapitre, l'indice de modulation  $h$  est supposé constant. Toutefois, dans le cas de modulations CPM **multi-indices** ([10]), l'indice de modulation varie au cours du temps de manière périodique. Ce type de modulation CPM, non employé en pratique en raison de la complexité du démodulateur associé, n'a pas été considéré lors de ce travail de thèse.*

### 2.1.3 Représentation de Laurent

Nous introduisons dans ce paragraphe la représentation des signaux CPM proposée dans [11], dite représentation de Laurent. On peut en effet montrer qu'un signal CPM binaire peut s'écrire comme une somme d'un nombre fini de modulations d'amplitude. Il s'agit d'un résultat fréquemment utilisé dans la littérature, et nous y ferons également appel dans la suite de ce document.

Nous commençons par mentionner le cas de CPM à réponse complète ( $L = 1$ ), pour lequel la représentation de Laurent est particulièrement simple, puis nous décrivons comment ce résultat peut être étendu au cas de CPM à réponse partielle ( $L > 1$ ).

#### ■ Signaux CPM à réponse complète

Lorsque la longueur  $L$  du filtre de mise en forme est égale à un, la représentation de Laurent permet d'écrire l'enveloppe complexe d'un signal CPM comme une modulation

<sup>1</sup>La lettre  $L$  désigne la longueur  $L$  du filtre de mise en forme. Par exemple, une modulation 1REC comporte un filtre de mise en forme de longueur  $L = 1$ .

linéaire d'un train de pseudo-symboles. Ce résultat est démontré dans [11], mais il nous a semblé utile de rappeler son origine.

On considère un signal CPM  $s_a(t)$  à réponse complète. En utilisant l'expression (2.4) avec  $L = 1$ , on peut donc écrire que pour tout  $t$  tel que  $nT_s \leq t < (n+1)T_s$ ,

$$\begin{aligned} s_a(t) &= \exp i\pi h \left( \sum_{k=-\infty}^{n-1} a_k + \phi_a(t - nT_s)a_n \right) \\ &= \exp \left( i\pi h \sum_{k=-\infty}^{n-1} a_k \right) \exp (i\pi h \phi_a(t - nT_s)a_n) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

L'étape cruciale consiste à écrire  $\exp (i\pi h \phi_a(t - nT_s)a_n)$  de la manière suivante :

$$\exp (i\pi h \phi_a(t - nT_s)a_n) = e^{i\pi h a_n} \frac{\sin(\pi h \phi_a(t - nT_s))}{S} + \frac{\sin(\pi h - \pi h \phi_a(t - nT_s))}{S}, \quad (2.6)$$

où  $S = \sin \pi h$ . Remarquons que ceci n'est vrai que pour des indices de modulation  $h$  non entiers. En réinjectant l'expression ci-dessus dans (2.5), on obtient que pour tout réel  $t$  de l'intervalle  $[nT_s, (n+1)T_s[$ ,

$$s_a(t) = x(n) \frac{\sin(\pi h \phi_a(t - nT_s))}{S} + x(n-1) \frac{\sin(\pi h - \pi h \phi_a(t - nT_s))}{S} \quad (2.7)$$

où  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est la série temporelle définie pour tout entier  $n$  par :

$$x(n) = \exp \left( i\pi h \sum_{k=-\infty}^n a_k \right). \quad (2.8)$$

$(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est appelée la *suite des pseudo-symboles*. Elle ne dépend que des symboles d'information et de l'indice de la modulation, et possède les propriétés suivantes :

- $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite stationnaire de moyenne nulle ;
- $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifie :  $x(n) = s_a((n+1)T_s)$  pour tout  $n$  ;
- $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifie la relation récursive

$$x_n = \exp(i\pi h a_n) x_{n-1}. \quad (2.9)$$

En particulier, la suite des pseudo-symboles est temporellement corrélée. En outre, on peut montrer que  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  correspond à un modèle AR d'ordre 1.

À partir de (2.7), on peut montrer que le signal  $s_a(t)$  peut s'écrire comme une modulation linéaire des pseudo-symboles : pour tout  $t$ ,

$$s_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) c(t - nT_s), \quad (2.10)$$

où  $c(t)$  est la fonction de mise en forme de *Laurent* définie de la manière suivante :  $c(t)$  est nulle hors de l'intervalle de temps  $[0, 2T_s]$ , et vérifie

$$\begin{cases} c(t) = \frac{\sin(\pi h \phi_a(t))}{S} & \text{pour } 0 \leq t \leq T_s \\ c(t) = \frac{\sin(\pi h - \pi h \phi_a(t - T_s))}{S} & \text{pour } T_s \leq t \leq 2T_s. \end{cases} \quad (2.11)$$

Nous insistons sur le fait que le support temporel de la fonction de mise en forme  $c(t)$  est de longueur  $2T_s$ . L'expression (2.10) est couramment appelée *représentation de Laurent*.

### ■ Signaux CPM à réponse partielle

Le résultat précédent peut être généralisé au cas où la longueur  $L$  du filtre de mise en forme est supérieure à un. Dans ce cas, le signal CPM  $s_a(t)$  ne peut plus être modélisé comme une simple modulation linéaire. La représentation de Laurent permet en revanche d'exprimer  $s_a(t)$  comme une somme de  $2^{L-1}$  modulations linéaires. Ce résultat est démontré dans [11]. Nous nous contentons ici de l'énoncer.

Afin de présenter la représentation de Laurent, nous devons auparavant introduire les notations suivantes. On désigne par  $\mathcal{P}_L$  l'ensemble des parties de  $\{1, 2, \dots, L-1\}$  :

$$\mathcal{P}_L = \left\{ \{j_1, j_2, \dots, j_p\} \in \{1, \dots, L-1\}^p \mid j_1 < j_2 < \dots < j_p, p \in \{1, \dots, L-1\} \right\}.$$

Autrement dit, tout élément  $\nu$  appartenant à  $\mathcal{P}_L$  est un sous-ensemble de  $\{1, \dots, L-1\}$ . On note  $\emptyset$  l'ensemble vide. Il existe  $2^{L-1}$  sous-ensembles de  $\{1, \dots, L-1\}$ , ce que l'on écrit  $\text{card}(\mathcal{P}_L) = 2^{L-1}$ . En outre, on désigne par  $\bar{\nu}^L$  le complémentaire de  $\nu$  dans l'ensemble  $\{1, \dots, L-1\}$  : pour un élément  $\nu = \{j_1, \dots, j_p\}$  de  $\mathcal{P}_L$ , on pose donc :

$$\bar{\nu}^L = \{j'_1, \dots, j'_{L-1-p}\}$$

avec  $j'_1 < j'_2 < \dots < j'_{L-1-p}$  et  $j_k \neq j_{k'}$  quels que soient les entiers  $k$  et  $k'$ . Bien entendu,  $\bar{\nu}^L$  est un élément de  $\mathcal{P}_L$ .

La représentation de Laurent consiste à définir pour chaque sous-ensemble  $\nu \in \mathcal{P}_L$  :

- une suite de pseudo-symboles  $(x_\nu(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , qui dépend des symboles d'information ;
- une fonction  $c_\nu(t)$ , dite fonction de *mise en forme de Laurent*, qui dépend de  $\phi_a(t)$ .

Le signal CPM  $s_a(t)$  coïncide alors avec la somme sur tous les sous-ensembles  $\nu \in \mathcal{P}_L$  des signaux obtenus en modulant linéairement la suite de pseudo-symboles  $(x_\nu(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  par la mise en forme  $c_\nu(t)$ .

Pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , on définit la suite de pseudo-symboles  $(x_\nu(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  par :

$$\forall n, \quad x_\nu(n) = \exp \left[ i\pi h \left( \sum_{k=-\infty}^{n-L} a_k + \sum_{k \in \nu} a_{n-k} + a_n \right) \right]. \quad (2.12)$$

Comme précédemment, on remarque que  $(x_\nu(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite temporellement corrélée. De plus, les différentes suites de pseudo-symboles sont mutuellement corrélées. Alors, pour tout  $t$ ,  $s_a(t)$  peut être mis sous la forme :

$$s_a(t) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_\nu(n) c_\nu(t - nT_s) \right). \quad (2.13)$$

L'expression (2.13) est appelée la représentation de Laurent de  $s_a(t)$ . Les fonctions de mise en forme de Laurent  $(c_\nu(t))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  peuvent être définies de la façon suivante. Comme dans

[11], considérons la fonction  $S_0(t)$  donnée par :

$$S_0(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi h \phi_a(t))}{S} & \text{si } 0 \leq t \leq LT_s, \\ \frac{\sin(\pi h - \pi h \phi_a(t - LT_s))}{S} & \text{si } LT_s \leq t \leq 2LT_s. \end{cases}$$

Pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , on pose enfin :

$$c_\nu(t) = S_0(t) \prod_{j \in \nu} S_0(t + jT_s) \prod_{j \in \bar{\nu}^L} S_0(t + (j + L)T_s). \quad (2.14)$$

Par exemple, pour  $\nu = \{1, 2, \dots, L - 1\}$ , la fonction  $c_\nu(t)$  s'écrit

$$c_{\{1 \dots L-1\}}(t) = \prod_{j=0}^{L-1} S_0(t + jT_s) \quad (2.15)$$

et est appelée la *fonction de mise en forme principale*. Puisque  $S_0(t)$  et  $S_0(t + (L - 1)T)$  ont respectivement pour support les intervalles  $[0, 2LT_s]$  et  $[-(L - 1)T_s, (L + 1)T_s]$ , on peut facilement vérifier que  $c_{\{1 \dots L-1\}}(t)$  n'est non nulle que si  $t$  est dans l'intervalle  $[0, (L + 1)T_s]$ . Si au contraire  $\nu$  est différent de  $\{1, 2, \dots, L - 1\}$ , alors on peut montrer grâce au même genre de considérations que la fonction  $c_\nu(t)$  a pour support l'intervalle  $[0, (L - \max(\bar{\nu}^L))T_s]$ , où  $\max(\bar{\nu}^L)$  désigne le plus grand élément de  $\bar{\nu}^L$ . Par exemple, si  $\nu = \{2, 3, \dots, L - 1\}$ , le complémentaire  $\bar{\nu}^L$  est réduit au singleton  $\{1\}$  et le support temporel de  $c_\nu(t)$  coïncide alors avec  $[0, (L - 1)T_s]$ . D'une manière générale, on s'aperçoit que pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , le support temporel de  $c_\nu(t)$  est inclus dans l'intervalle  $[0, (L + 1)T_s]$ .

## 2.2 Démodulateurs

Dans cette section, nous présentons les techniques usuelles de démodulation des CPM. La démodulation des CPM est un sujet abondamment traité dans la littérature. Notons que cette section n'a pas pour but de faire l'inventaire de l'ensemble des procédés proposés jusqu'ici, ni d'examiner dans le détail les performances des démodulateurs présentés. Nous nous contentons de justifier l'emploi des techniques les plus classiques, de décrire brièvement leur mise en œuvre et d'étudier enfin leurs performances par simulation.

### 2.2.1 Problématique et présentation générale

Nous supposons dans ce chapitre que le signal émis a pour enveloppe complexe le processus  $s_a(t)$  défini par (2.1). En outre, la réception est perturbée par un bruit gaussien additif  $b_a(t)$  de variance  $\sigma^2$  et par un éventuel gain complexe  $Ae^{i\theta_0}$ . Le signal reçu  $y_a(t)$  peut donc être mis sous la forme :

$$y_a(t) = Ae^{i\theta_0} s_a(t) + b_a(t), \quad (2.16)$$

où  $\theta_0$  représente une éventuelle rotation de phase. En pratique, le signal reçu est échantillonné à la période  $T_e$ . On considère alors que le bruit  $b_a(t)$  est blanc dans la bande  $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$  : sa densité spectrale est égale à une constante  $N_0$  dans cette bande de fréquences et nulle ailleurs.

La démodulation à proprement parler vise à extraire les symboles d'information  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  à partir d'échantillons du signal  $y_a(t)$ . Elle constitue donc l'ultime étape de la chaîne de réception. Par conséquent, nous supposons dans ce chapitre que les paramètres techniques de la modulation (l'indice de modulation  $h$ , le filtre de mise en forme  $g_a(t)$  et la période symbole  $T_s$ ) sont connus. De plus, l'expression (2.16) suppose implicitement que la synchronisation en temps et en fréquence a été préalablement effectuée. Afin de présenter les algorithmes de démodulation utilisés, nous supposons que les opérations précédentes se sont déroulées parfaitement.

Les démodulateurs présentés dans ce chapitre permettent d'extraire les symboles à partir d'une version échantillonnée du signal reçu  $y_a(t)$ . La période symbole  $T_s$  étant connue, nous pouvons supposer que  $y_a(t)$  est échantillonné à la période d'échantillonnage  $T_e$  égale à  $\frac{T_s}{M}$ , où  $M$  est un entier. En désignant par  $s(k)$  le signal  $s_a(kT_e)$ , nous disposons donc du signal à temps discret

$$y(k) = Ae^{i\theta_0} s(k) + b(k),$$

où  $b(k)$  est un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma^2$  égale à  $\sigma^2 = \frac{N_0}{T_e}$ , où  $N_0$  est la densité spectrale de puissance du bruit. Le signal  $y(k)$  est observé sur une durée correspondant à  $N$  symboles, i.e. on dispose des échantillons  $(y_a(kT_e))_{k=0 \dots NM-1}$ .

On distingue deux grandes familles de démodulateurs selon que la connaissance de  $\theta_0$  est nécessaire ou non. On appelle *démodulateurs cohérents* les démodulateurs qui nécessitent la compensation préalable du déphasage  $\theta_0$ . Inversement, la synchronisation en phase n'est pas nécessaire au fonctionnement des *démodulateurs non cohérents*.

### 2.2.2 Démodulation cohérente : algorithme de Viterbi

La première approche consiste à estimer la séquence de symbole  $(a_n)_{n=-L+1 \dots N-1}$  en utilisant le critère du maximum de vraisemblance.

En premier lieu, nous exprimons les échantillons  $s(k)$  sous la forme  $s(k) = \exp i\psi(k)$ , où  $\psi(k) = \psi_a(kT_e)$  pour tout entier  $k$ . Grâce à l'expression (2.4), on constate que pour tout entier  $n$  et pour tout entier  $m$  compris entre 0 et  $M-1$ ,

$$\psi(nM + m) = \pi h \sum_{j=-\infty}^{n-L} a_j + \pi h \sum_{j=0}^{L-1} a_{n-j} \phi_{j,m}, \quad (2.17)$$

où les coefficients  $\phi_{j,m}$  sont définis pour tout  $j = 0, \dots, L-1$  et pour tout  $m = 0, \dots, M-1$  par  $\phi_{j,m} = \phi_a(jT_s + mT_e)$ . L'équation (2.17) permet d'exprimer les échantillons  $y(k)$  de la manière suivante. Pour tout  $n$  tel que  $n \geq 0$  et pour tout  $m = 0, \dots, M-1$ ,

$$y(nM + m) = Ae^{i\tilde{\theta}_0} \exp \left( i\pi h \sum_{j=-L+1}^{n-L} a_j + i\pi h \sum_{j=0}^{L-1} a_{n-j} \phi_{j,m} \right) + b(nM + m), \quad (2.18)$$

où le déphasage  $\tilde{\theta}_0$ , défini par

$$\tilde{\theta}_0 = \theta_0 + \pi h \sum_{j=-\infty}^{-L} a_j,$$

représente l'effet conjoint du déphasage  $\theta_0$  et du cumul des symboles émis aux instants précédant le début de l'observation. Soit  $\mathbf{y}$  le vecteur qui regroupe l'ensemble des données

observées :  $\mathbf{y} = [y(0), \dots, y(NM - 1)]^T$ . De même, pour toute séquence de symboles  $\alpha_{-L+1}, \dots, \alpha_{N-1}$ , on pose  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{-L+1}, \dots, \alpha_{N-1}]^T$ . Dans notre contexte, les valeurs des paramètres  $\tilde{\theta}_0$ ,  $\sigma^2$  et  $A$  sont au départ supposées inconnues du récepteur. On désigne alors par  $\boldsymbol{\theta}$  le vecteur constitué par ces trois paramètres :  $\boldsymbol{\theta} = [\tilde{\theta}_0, \sigma^2, A]^T$ . Estimer les symboles par le critère du maximum de vraisemblance revient alors à maximiser conjointement le log-vraisemblance  $\log p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta})$  par rapport à  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\theta}$ , ce que l'on écrit :

$$(\hat{\mathbf{a}}_{MV}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{MV}) = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}} \log p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}).$$

$\hat{\mathbf{a}}_{MV}$  représente l'estimée des symboles émis  $a_{-L+1}, \dots, a_{N-1}$  au sens du maximum de vraisemblance. Or on peut montrer que :

$$\log p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{2A}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{NM-1} \Re \left[ e^{-i\tilde{\theta}_0} y(k) e^{-i\Psi(k, \boldsymbol{\alpha})} \right] - NM \log \sigma + C, \quad (2.19)$$

où  $C$  est une constante et où  $\Psi(k, \boldsymbol{\alpha})$  représente la phase à l'instant  $kT_e$  produite par la séquence de symboles  $\boldsymbol{\alpha}$  : pour tout entier  $n = 0, \dots, N-1$  et pour tout  $m = 0, \dots, M-1$ ,

$$\Psi(nM + m, \boldsymbol{\alpha}) = \pi h \sum_{j=-L+1}^{n-L} \alpha_j + \pi h \sum_{j=0}^{L-1} \alpha_{n-j} \phi_{j,m}. \quad (2.20)$$

En utilisant l'expression (2.19), on peut estimer les symboles et la valeur du déphasage indépendamment des deux paramètres de nuisance  $\sigma^2$  et  $A$ . En effet, les estimées des symboles et du déphasage au sens du maximum de vraisemblance correspondent aux valeurs des paramètres  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\tilde{\theta}_0$  qui maximisent l'expression :

$$\sum_{k=0}^{NM-1} \Re \left[ e^{-i\tilde{\theta}_0} y(k) e^{-i\Psi(k, \boldsymbol{\alpha})} \right]. \quad (2.21)$$

Afin de s'affranchir de l'influence du déphasage, on pourrait minimiser en  $\tilde{\theta}_0$  l'expression (2.21) pour chaque valeur de  $\boldsymbol{\alpha}$ , et réinjecter l'expression du  $\tilde{\theta}_0$  optimal. Cette procédure reviendrait à maximiser par rapport à  $\boldsymbol{\alpha}$  le critère

$$\left| \sum_{k=0}^{NM-1} y(k) \exp(-i\Psi(k, \boldsymbol{\alpha})) \right|^2.$$

Ce critère ne peut malheureusement pas se maximiser via un algorithme de Viterbi et sa maximisation est donc particulièrement coûteuse en temps de calcul. Par conséquent, l'utilisation du récepteur au sens du maximum de vraisemblance ne peut être envisagée qu'en développant en parallèle une technique d'estimation de  $\tilde{\theta}_0$ . Nous nous plaçons donc dans le cadre de la démodulation cohérente et nous supposons désormais que  $\tilde{\theta}_0$  est connu. Nous choisissons en outre la valeur  $\tilde{\theta}_0 = 0$  pour simplifier les notations. Nous verrons à la fin de ce paragraphe comment adapter l'algorithme de démodulation cohérente présenté ici au cas où le déphasage  $\tilde{\theta}_0$  est inconnu.

Lorsque  $\tilde{\theta}_0 = 0$ , l'estimée  $\hat{\mathbf{a}}_{MV}$  des symboles émis au sens du maximum de vraisemblance peut être définie comme la valeur de la séquence  $\boldsymbol{\alpha}$  qui maximise (2.21), soit

$$\hat{\mathbf{a}}_{MV} = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha}} \sum_{k=0}^{NM-1} \Re \left[ y(k) e^{-i\Psi(k, \boldsymbol{\alpha})} \right].$$

À première vue, il semble donc que l'estimation des symboles requiert d'évaluer le critère ci-dessus pour toutes les valeurs possibles de la séquence  $\alpha$ . Toutefois, cette étape peut être grandement simplifiée en remarquant que la suite  $(e^{-i\Psi(k,\alpha)})_{k=0\dots NM-1}$  est modélisable par un modèle de Markov caché, [12].

• En effet, pour tout entier  $n$  compris entre 0 et  $N-1$  et pour tout  $m$  compris entre 0 et  $M-1$ , la phase  $\Psi(nM+m)$  ne dépend que de la phase cumulée  $\Theta_n = \pi h \sum_{j=-L+1}^{n-L} \alpha_j$  et des symboles  $\alpha_{n-L+1}, \dots, \alpha_n$  :

$$\psi(nM+m, \alpha) = \Theta_n + \theta(m, \alpha_{n-L+1}, \dots, \alpha_n), \quad (2.22)$$

où  $\theta(m, \alpha_{n-L+1}, \dots, \alpha_n)$  correspond à la phase courante  $\pi h \sum_{j=0}^{L-1} \alpha_{n-j} \phi_{j,m}$ . Par conséquent, on peut écrire que  $e^{i\Psi(nM+m)} = F_m(\xi(n))$  où  $F_m$  est une application et où  $\xi(n)$  est le vecteur d'état défini par  $\xi(n) = [e^{i\Theta_n}, \alpha_{n-L+1}, \dots, \alpha_n]^T$  :

$$e^{i\Psi(nM+m)} = F_m(\xi(n)) = e^{i\Theta_n} \exp(i\theta(m, \alpha_{n-L+1}, \dots, \alpha_n)).$$

• Faisons de plus l'hypothèse que l'indice de modulation  $h$  est rationnel ( $h = p/q$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux). Alors on peut montrer que, lorsque  $n$  varie, le vecteur d'état  $\xi(n)$  appartient à un ensemble restreint de valeurs. En effet, pour un entier  $n$  fixé,  $\Theta_n = \pi h \sum_{j=-L+1}^{n-L} \alpha_j$  est un multiple entier de  $\pi h$ , soit  $\theta_n = \pi h k_n$ , où  $k_n \in \mathbb{Z}$ . Alors, si  $p$  est pair : La division euclidienne de  $k_n$  par  $q$  permet d'écrire  $k_n = b_n q + r_n$ , où  $b_n$  est un entier et où  $r_n \in \{0, \dots, q-1\}$ . En posant  $p = 2p'$ , on obtient enfin

$$\Theta_n = \pi \frac{p}{q} r_n + 2\pi p' b_n.$$

Donc lorsque  $n$  varie,  $\Theta_n$  décrit modulo  $2\pi$  l'ensemble

$$\mathcal{S} = \left\{0, \frac{\pi p}{q}, \frac{2\pi p}{q}, \dots, \frac{(q-1)\pi p}{q}\right\}.$$

si  $p$  est impair : On écrit cette fois la division euclidienne de  $k_n$  par  $2q$ , soit  $k_n = 2b_n q + r_n$ , où  $r_n \in \{0, \dots, 2q-1\}$ . On s'aperçoit alors que  $\Theta_n = \pi \frac{p}{q} r_n$  modulo  $2\pi$ . Donc,  $\Theta_n$  décrit modulo  $2\pi$  l'ensemble

$$\mathcal{S} = \left\{0, \frac{\pi p}{q}, \frac{2\pi p}{q}, \dots, \frac{(2q-1)\pi p}{q}\right\}.$$

Dans tous les cas, le vecteur d'état  $\xi(n) = [e^{i\Theta_n}, \alpha_{n-L+1}, \dots, \alpha_n]^T$  appartient à l'ensemble  $\Xi$  défini par :

$$\Xi = \left\{ [e^{i\Theta}, \epsilon_0, \dots, \epsilon_{L-1}]^T / \Theta \in \mathcal{S}, \epsilon_0 = \pm 1, \dots, \epsilon_{L-1} = \pm 1 \right\}.$$

Le nombre total d'états est donc égal à  $q2^L$  si  $p$  est pair, et à  $2q2^L$  si  $p$  est impair ■

Compte tenu de la forme du critère à minimiser, on peut utiliser un algorithme de Viterbi. Pour tout entier  $n$  et tout vecteur  $\xi = [e^{i\Theta}, \epsilon_0, \dots, \epsilon_{L-1}]^T$  appartenant à  $\Xi$ , la métrique de branche est définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_B(n, \xi) &= \sum_{m=0}^{M-1} \Re [y(nM+m) F_m(\xi)^*] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \Re [y(nM+m) e^{-i\Theta} \exp(-i\theta(m, \epsilon_0, \dots, \epsilon_{L-1}))]. \end{aligned}$$

L'algorithme de Viterbi qui découle de cette métrique sera appelé démodulateur cohérent dans la suite.

### ■ Quantification de l'indice

Le démodulateur cohérent présenté ici nécessite d'écrire l'indice de modulation  $h$  sous la forme d'une fraction rationnelle. En pratique,  $h$  est effectivement rationnel,  $h = p/q$ . Lorsque  $h$  est connu, l'emploi du démodulateur cohérent ne pose donc pas de problème. En revanche, lorsque l'on ne dispose que d'une estimée de  $h$ , il est nécessaire de mettre en œuvre une procédure d'estimation de  $p$  et  $q$  avant l'utilisation du démodulateur. Ceci revient à quantifier l'indice. Si par exemple  $h$  est compris entre 0 et 1, nous proposons de choisir  $p$  et  $q$  tels que  $p < q \leq Q_{\max}$  et tels que  $p/q$  soit le rationnel le plus proche de l'estimée de  $h$ .  $1/Q_{\max}$  joue en quelque sorte le rôle d'un pas de quantification. L'entier  $Q_{\max}$  doit bien entendu être supérieur à la vraie valeur de  $q$ . Néanmoins, il peut être bénéfique de choisir  $Q_{\max}$  suffisamment faible afin que l'erreur d'estimation éventuelle commise sur  $h$  puisse être rectifiée par la quantification. Cela permet également de limiter le nombre d'états de l'algorithme de Viterbi.

### ■ Extension au cas d'un déphasage inconnu

Comme nous l'avons évoqué, l'algorithme de Viterbi décrit ci-avant est destiné à fonctionner lorsque le déphasage  $\tilde{\theta}_0$  est connu. Cette hypothèse est toutefois restrictive dans notre contexte. En pratique, les techniques de démodulation cohérente ne peuvent être appliquées que si un estimateur de  $\tilde{\theta}_0$  est mis en œuvre par ailleurs.

L'estimation conjointe des symboles et du déphasage au sens du maximum de vraisemblance peut s'effectuer comme dans [5], en maximisant (2.21) par rapport à  $\alpha$  et  $\tilde{\theta}_0$ . Ceci revient dans un premier temps à calculer

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{a}}(\tilde{\theta}_0) &= \arg \max_{\alpha} \sum_{k=0}^{NM-1} \mathcal{R}e \left[ e^{-i\tilde{\theta}_0} y(k) e^{-i\Psi(k, \alpha)} \right] \\ \mathcal{M}(\tilde{\theta}_0) &= \sum_{k=0}^{NM-1} \mathcal{R}e \left[ e^{-i\tilde{\theta}_0} y(k) e^{-i\Psi(k, \hat{\alpha}(\tilde{\theta}_0))} \right] \end{cases} \quad (2.23)$$

pour chaque valeur possible de  $\tilde{\theta}_0$ . Notons que pour une valeur fixée de  $\tilde{\theta}_0$ , les valeurs de  $\hat{\mathbf{a}}(\tilde{\theta}_0)$  et de  $\mathcal{M}(\tilde{\theta}_0)$  peuvent être obtenues grâce à l'algorithme de Viterbi décrit précédemment. Les estimées des symboles et du déphasage peuvent ensuite être définis par :

$$\hat{\theta}_{MV} = \arg \max_{\tilde{\theta}_0} \mathcal{M}(\tilde{\theta}_0)$$

et

$$\hat{\mathbf{a}}_{MV} = \hat{\mathbf{a}}(\hat{\theta}_{MV}).$$

En pratique, la recherche exhaustive en  $\tilde{\theta}_0$  s'effectue sur une grille incluse dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$  :  $\hat{\mathbf{a}}(\tilde{\theta}_0)$  et  $\mathcal{M}(\tilde{\theta}_0)$  sont alors évalués pour toute valeur de  $\tilde{\theta}_0$  sur cette grille.

**Remarque 2.3 :** *La méthode ci-dessus peut naturellement être généralisée au cas où le signal dont on dispose n'est pas synchronisé temporellement, [5]. Il s'agit alors d'estimer conjointement la phase, le retard et les données.*

### 2.2.3 Démodulation non cohérente symbole par symbole

Le procédé que nous présentons est la généralisation immédiate d'une solution proposée dans [13] dans le cas de modulations CPFSK.

Nous avons vu au paragraphe précédent que l'estimation *non cohérente* des symboles par le critère du maximum de vraisemblance nécessite d'évaluer l'expression

$$\left| \sum_{k=0}^{NM-1} y(k) \exp(-i\Psi(k, \boldsymbol{\alpha})) \right|^2 \quad (2.24)$$

pour chaque séquence binaire  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{-L+1}, \dots, \alpha_{N-1}]^T$ . Une telle méthode n'est donc pas susceptible d'être implémentée en raison de sa complexité. Afin de réduire ce coût de calcul, une solution consiste à appliquer une fenêtre temporelle aux échantillons du signal reçu et à décider de la valeur d'un symbole en ne prenant en compte que les échantillons appartenant à cette fenêtre. Soit par exemple une fenêtre temporelle d'une durée correspondant à l'émission de  $2D + 1$  symboles, où  $D$  est un entier naturel. Pour tout entier  $n$ , on estime la valeur du symbole  $\hat{a}_n$  en restreignant l'ensemble des échantillons disponibles au vecteur

$$\mathbf{y}_n = [y((n-D)M), y((n-D)M+1), \dots, y((n+D)M+M-1)]^T$$

et on estime les symboles  $un$  à  $un$ , en faisant varier  $n$ . Pour un entier  $n$  fixé, l'estimée  $\hat{a}_n$  du symbole  $a_n$  est calculée à partir du critère du maximum de vraisemblance lorsque les observations sont restreintes au seul vecteur  $\mathbf{y}_n$ . Afin d'exprimer simplement ce critère, on remarque en généralisant l'égalité (2.18) que pour tout entier  $p$  compris entre  $-D$  et  $D$  et pour tout  $m = 0, \dots, M-1$ ,

$$y((n+p)M+m) = Ae^{i\theta(n)} \exp i\pi h \left( \sum_{j=n-D-L+1}^{n+p-L+1} a_j + \sum_{j=0}^{L-1} a_{n+p-j} \phi_{j,m} \right) + b((n+p)M+m),$$

où  $\theta(n)$  est défini par :

$$\theta(n) = \pi h \sum_{j=-\infty}^{n-D-L} a_j + \theta_0.$$

On constate donc que le vecteur  $\mathbf{y}_n$  des observations prises en compte ne dépend que de  $\theta(n)$  et des symboles  $a_{n-D-L+1}, \dots, a_{n+D}$ . En utilisant le même raisonnement qu'au paragraphe précédent, on exprime l'estimée du symbole  $a_n$  par le critère du maximum de vraisemblance lorsque seul le vecteur  $\mathbf{y}_n$  est connu. On désigne par  $\boldsymbol{\alpha}_D = [\alpha_{-D-L+1}, \dots, \alpha_D]^T$  un vecteur de  $2D + L$  symboles binaires. Décider la valeur du symbole  $a_n$  nécessite alors d'évaluer la quantité suivante pour toute séquence binaire  $\boldsymbol{\alpha}_D$  :

$$\mathcal{M}(n, \boldsymbol{\alpha}_D) = \left| \sum_{p=-D}^D \sum_{m=0}^{M-1} y((n+p)M+m) \exp(-i\Psi(pM+m, \boldsymbol{\alpha}_D)) \right|^2, \quad (2.25)$$

où la fonction  $\Psi(k, \boldsymbol{\alpha}_D)$  est définie par extension de (2.20) : pour tout entier  $p = -D, \dots, D$  et pour tout  $m = 0, \dots, M-1$ ,

$$\Psi(pM+m, \boldsymbol{\alpha}_D) = \pi h \sum_{j=-D-L+1}^{p-L} \alpha_j + \pi h \sum_{j=0}^{L-1} \alpha_{p-j} \phi_{j,m}. \quad (2.26)$$

Finalement, l'estimée  $\hat{a}_n$  du symbole  $a_n$  peut être exprimée de la manière suivante :

$$\hat{a}_n = \arg \max_{\alpha=\pm 1} \left( \begin{array}{c} \max_{\substack{\alpha_{2D+L} \\ \alpha_0 = \alpha}} \mathcal{M}(n, \alpha_D) \end{array} \right). \quad (2.27)$$

Le démodulateur “symbole par symbole” dérivé de l'expression précédente est appelé dans la suite démodulateur *non cohérent*. Cette appellation provient du fait que la règle de décision précédente ne dépend pas du déphasage initial  $\theta_0$  : le démodulateur qui en résulte ne requiert donc pas d'estimation préalable de ce déphasage.

#### Remarques 2.4 :

- Lorsque la taille de la fenêtre de corrélation augmente et lorsque le nombre  $NM$  d'échantillons observés est suffisamment grand, les expressions (2.24) et (2.25) tendent à coïncider. On peut donc s'attendre à ce que les performances du démodulateur cohérent se rapprochent de celles d'une démodulation optimale au sens du maximum de vraisemblance lorsque  $D$  augmente.

- Le principal inconvénient de l'algorithme est sa complexité, dès lors qu'une fenêtre temporelle longue est utilisée ou que la modulation comporte une longueur de corrélation  $L$  importante. En effet, l'expression (2.25) doit être évaluée pour toute séquence  $\alpha_D$  de  $2D + L$  symboles binaires, ce qui requiert de l'ordre de  $2^{2D+L}$  opérations.

## 2.3 Simulations

Nous comparons ici les performances obtenues en utilisant chacun des deux démodulateurs cohérent et non cohérent. Le taux d'erreur binaire est la grandeur choisie pour caractériser les performances de la chaîne de réception. On note  $TEB^C$  (resp.  $TEB^{NC}$ ) le taux d'erreur binaire obtenu après démodulation cohérente (resp. non cohérente). Dans un premier temps, nous cherchons à évaluer les performances intrinsèques des démodulateurs. Tous les paramètres sont alors supposés parfaitement connus. Dans un deuxième temps, nous étudions la dégradation éventuelle des performances lorsque le filtre de mise en forme utilisé à l'émission est inconnu. Ce cas peut en effet se produire dans le contexte de l'écoute passive. Nous observons qu'en pratique, la démodulation peut être effectuée même si la classe de modulation utilisée est inconnue du récepteur.

### 2.3.1 Paramètres utilisés dans les simulations

Afin de pouvoir appréhender les influences respectives des différents paramètres techniques, nous évaluons d'abord les performances des deux démodulateurs dans un contexte de simulation qui nous servira de référence. Dans un deuxième temps, nous faisons varier certains paramètres (tels que la fonction de mise en forme, l'indice de modulation, etc.) et comparons les performances obtenues à celles du contexte initial.

Nous présentons maintenant le contexte de référence. Sauf précision contraire, les paramètres utilisés sont les suivants.

### Paramètres intrinsèques

La modulation émise est de type 3RC (filtre de mise en forme de type RC, longueur de corrélation  $L = 3$ ). Les performances seront également évaluées dans le cas de modulations 1RC et 1REC. L'indice de modulation  $h$  est égal à  $h = 4/7 = 0.571$ . Les symboles d'information appartiennent à un alphabet binaire.

### Bruit additif

Nous supposons qu'un bruit gaussien blanc dans la bande  $[-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}]$  s'ajoute au signal émis. Le rapport signal sur bruit qui est pris en compte est le rapport  $E_b/N_0$  de l'énergie par bit reçue et de la densité spectrale du bruit.

### Réception et démodulation

Le signal reçu est observé sur une durée de 1000 périodes symboles. Les démodulateurs présentés précédemment nécessitent que la période d'échantillonnage soit de la forme  $T_e = \frac{T_s}{M}$ . Dans les simulations suivantes, nous avons choisi  $T_e = \frac{T_s}{4}$ . Notons au passage que d'autres simulations ont montré que l'augmentation du facteur de suréchantillonnage  $M$  n'a que très peu d'influence sur les performances dès lors que  $M \geq 2$ .

Nous supposons que les paramètres de synchronisation (retard à l'arrivée, déphasage et résidu de porteuse) sont parfaitement connus. En ce qui concerne la démodulation non cohérente, nous utilisons une fenêtre temporelle qui s'étend sur  $2D + 1 = 5$  symboles, soit  $D = 2$ .

### 2.3.2 Performances dans le cas où les paramètres techniques sont connus

#### Contexte de référence

Pour une modulation de type 3RC et un indice  $h = 0.571$ , les taux d'erreur binaire calculés en sortie de chaque démodulateur sont donnés par la figure 2.1.

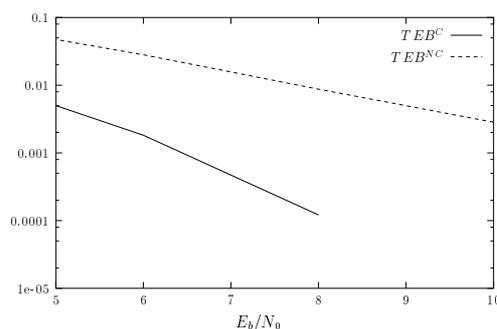


FIG. 2.1 – Taux d'erreur binaire - Modulation 3RC -  $h = 0.571$

#### Influence du fenêtrage sur la démodulation cohérente

Les performances du démodulateur non cohérent peuvent être considérablement améliorées en augmentant la taille de la fenêtre temporelle utilisée, c'est à dire en augmentant  $D$ .

Dans les simulations illustrées par la figure 2.1, nous avons choisi  $D = 2$ , soit une fenêtre de taille  $(2D + 1)T_s = 5T_s$ . La figure 2.2 représente les taux d'erreur binaire obtenus en sortie du démodulateur non cohérent pour  $D = 2, 3$  ou  $4$ . On observe que l'amélioration est significative.

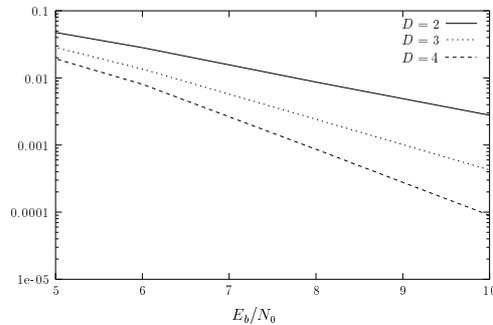
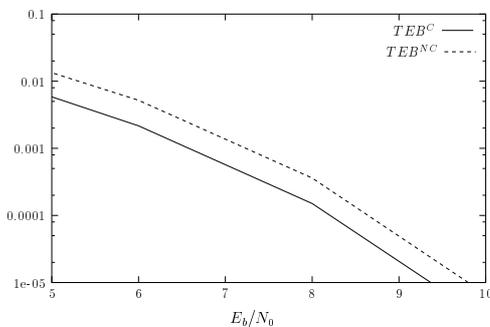


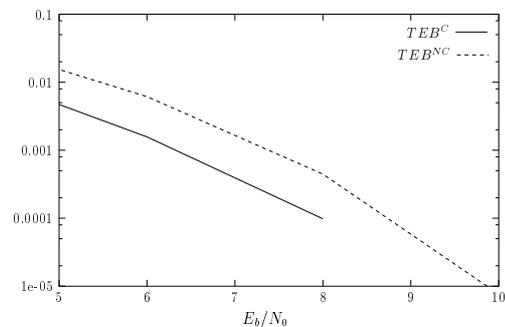
FIG. 2.2 – Taux d'erreur binaire - Modulation 3RC - Démodulation cohérente -  $h = 0.571$

### Influence du filtre de mise en forme

Les figures 2.3a et 2.3b représentent respectivement les performances obtenues lorsqu'une modulation 1RC ou une modulation 1REC est utilisée à l'émission. Les autres paramètres restent inchangés.



(a) Modulation 1RC



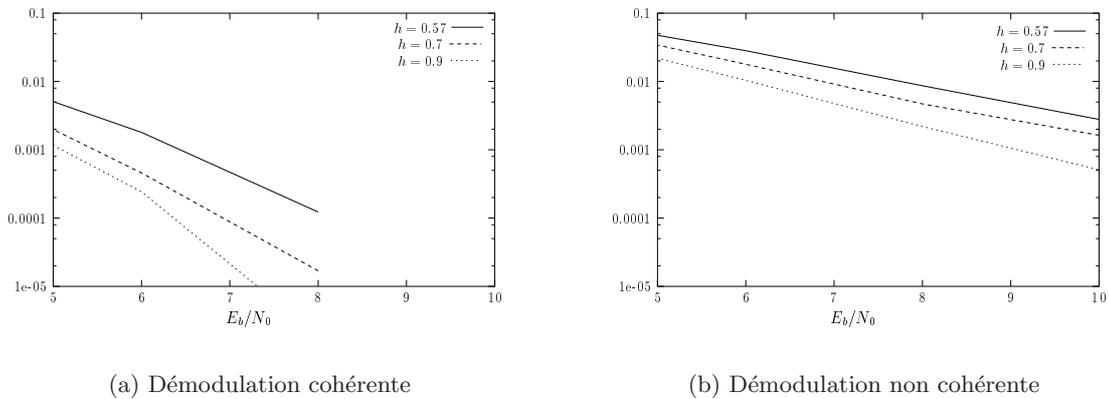
(b) Modulation 1RC

FIG. 2.3 – Taux d'erreur binaire - Modulations 1RC et 1REC -  $h = 0.571$

Que la modulation utilisée soit de type 1REC, 1RC ou 3RC, on remarque que les taux d'erreur binaires observés restent du même ordre.

### Influence de la valeur de l'indice

Si les performances des algorithmes de démodulation semblent peu sensible au filtre de mise en forme utilisé, en revanche, la valeur de l'indice joue un rôle crucial. Les figures 2.4a et 2.4b représentent les taux d'erreur binaire observés respectivement en sortie du démodulateur cohérent et du démodulateur non cohérent.

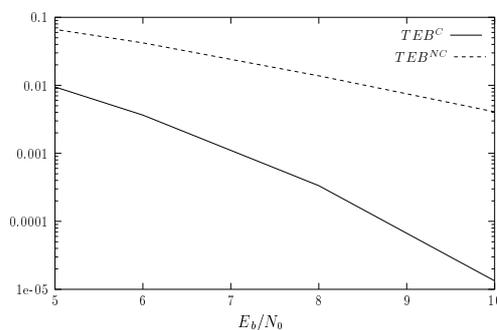
FIG. 2.4 – Influence de l'indice sur les  $TEB$  - Modulation 3RC

Il apparaît donc que l'indice influe considérablement sur les performances des démodulateurs.

### 2.3.3 Performances dans le cas où le filtre de mise en forme est inconnu

Nous supposons ici que les paramètres techniques sont connus à l'exception du filtre de mise en forme. Dans ce cas, la fonction de mise en forme utilisée à la démodulation peut ne pas coïncider avec la fonction de mise en forme effectivement utilisée par l'émetteur. Les différences peuvent concerner à la fois la longueur  $L$  supposée et le type de filtre de mise en forme (REC, RC, ...). Ici, nous étudions la dégradation éventuelle des performances qui peut résulter de ces différences.

Supposons dans un premier temps, comme dans le contexte de référence, que l'émetteur utilise une modulation de type 3RC. La figure 2.5 représente les taux d'erreur binaire obtenus lorsque les démodulateurs sont basés sur l'hypothèse erronée que le signal est en fait de type 1RC.

FIG. 2.5 – Taux d'erreur binaire - Modulation 3RC - Démodulation 1RC -  $h = 0.571$ 

En comparant les résultats de la figure 2.5 aux performances observées dans le cas idéal où le filtre de mise en forme est connu (figure 2.1), on constate une très légère dégradation des taux d'erreur binaire, comme on pouvait s'y attendre. Toutefois, cette diminution des performances est peu significative et les résultats restent tout à fait acceptables.

Dans la même perspective, supposons maintenant que le signal émis est une modulation 1REC. La figure 2.6 regroupe les résultats obtenus en utilisant là encore un filtre de mise en forme de type 1RC au niveau des démodulateurs.

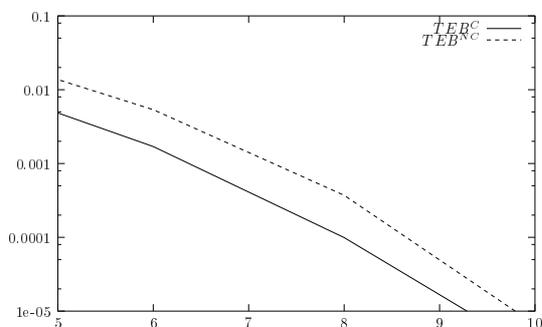


FIG. 2.6 – Taux d’erreur binaire - Modulation 1REC - Démodulation 1RC -  $h = 0.571$

Nous comparons cette fois la figure 2.6 à la figure 2.3b qui concerne le cas où le filtre utilisé au niveau du récepteur est égal au filtre de mise en forme utilisé à l’émission. Les observations sont les mêmes que dans le cas précédent : quel que soit le démodulateur utilisé, la dégradation des performances occasionnée par la méconnaissance du filtre de mise en forme est peu significative.

**Conclusion :** Dans le contexte de l’écoute passive (filtre de mise en forme inconnu) il est donc envisageable de récupérer les symboles émis sans qu’il soit nécessaire d’estimer au préalable le filtre de mise en forme. Quel que soit le filtre de mise en forme utilisé par l’émetteur, nous proposons d’utiliser les algorithmes de démodulation en supposant que la modulation est de type 1RC.

Après que les symboles ont été extraits, il est envisageable d’estimer le filtre de mise en forme (*c.f.* chapitre 6) grâce à une procédure “*data aided*”. Une fois cette étape réalisée, rien n’empêche d’extraire à nouveau les symboles en utilisant l’estimation précédente du filtre de mise en forme.

---

## Chapitre 3

# Égalisation aveugle de modulations CPM

Les démodulateurs décrits dans le chapitre précédent fonctionnent lorsque *i)* les distorsions produites par un éventuel canal de propagation ont été compensées, *ii)* les paramètres techniques et les paramètres de synchronisation ont été estimés. Nous devons donc nous interroger sur les procédés qui permettent de mener à bien chacune de ces deux tâches. Dans ce chapitre, nous étudions le problème de l'égalisation aveugle d'un signal CPM distordu par un canal de propagation sélectif en fréquence.

### 3.1 Problématique et plan du chapitre

#### 3.1.1 Introduction

Nous considérons qu'un émetteur inconnu transmet un signal CPM dont l'enveloppe complexe  $s_a(t)$  est définie par (2.1). En outre, la réception est perturbée par un canal de propagation inconnu sélectif en fréquence. Nous faisons l'hypothèse que la durée d'observation du signal est suffisamment courte pour que la réponse impulsionnelle du canal puisse être considérée comme invariante sur cette durée.

Deux différents types d'approche sont envisageables afin de s'affranchir des distorsions dues au canal de propagation. La première, l'*identification*, consiste à estimer les coefficients de la réponse impulsionnelle du canal aux instants multiples de la période d'échantillonnage. Dans le cas où les paramètres techniques du signal émis sont connus, la détection des symboles d'information peut ensuite être réalisée grâce à un algorithme de Viterbi : il suffit pour cela d'adapter le démodulateur cohérent présenté au chapitre précédent de manière à ce qu'il prenne en compte la présence d'un filtre à réponse impulsionnelle finie et connue. La seconde approche, l'*égalisation*, consiste à filtrer le signal reçu par un filtre dit "égaliseur" choisi de telle sorte qu'il compense les perturbations produites par le canal.

Dans le contexte des communications coopératives, on suppose en général qu'une séquence de symboles dite "séquence d'apprentissage", incluse dans la suite de données émises, est connue du récepteur : [13] définit des stratégies de choix de l'égaliseur qui exploitent cette information. En revanche, dans le contexte de l'écoute passive, aucune séquence d'apprentissage n'est disponible au niveau du récepteur. On parle alors d'égalisation aveugle et d'identification aveugle.

### 3.1.2 Modèle de signaux

Le signal CPM  $s_a(t)$  défini par (2.1) est distordu par un canal de propagation. Le signal reçu est susceptible de faire l'objet d'un filtrage passe-bas de réception. On suppose enfin que le signal reçu, éventuellement filtré passe-bas, a pu être ramené en bande de base et on note  $y_a(t)$  son enveloppe complexe. Le signal  $y_a(t)$  peut être vu comme la sortie d'un filtre de réponse fréquentielle  $H(f)$  excité par  $s_a(t)$ . Par abus de langage, nous appelons  $H(f)$  la réponse fréquentielle du canal. Le signal reçu est de surcroît perturbé par un bruit blanc gaussien additif  $b_a(t)$  de variance  $\sigma^2$ . Le signal  $y_a(t)$  est échantillonné à la période  $T_e$ , et on note  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  la suite des échantillons :  $y(n) = y_a(nT_e)$  pour tout entier  $n$ .

**Remarque 3.1 :** *Afin de simplifier ce qui suit, nous considérons pour le moment que la fréquence porteuse du signal reçu est parfaitement connue et que par conséquent le signal reçu a pu être parfaitement ramené en bande de base. Toutefois, cette hypothèse est restrictive dans le cas de transmissions radioélectriques, et tout particulièrement dans le contexte de l'écoute passive. Il nous faudra donc discuter de l'influence que peut avoir un résidu de fréquence porteuse  $\delta f_0$  sur les performances des méthodes décrites.*

### 3.1.3 Généralités sur la compensation aveugle du canal de transmission

Dans les paragraphes qui vont suivre, nous commençons par rappeler le principe des méthodes de compensation aveugle de canal proposées dans la littérature pour le cas où une modulation CPM est émise. Ces méthodes sont pour la plupart des techniques d'identification fondées sur l'observation que le signal à temps discret  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  peut être vu comme une chaîne de Markov cachée : l'algorithme EM [14] est alors utilisé pour identifier la réponse impulsionnelle du canal de propagation. Outre le fait que ces approches requièrent une estimée initiale pertinente des coefficients du canal, elles présentent l'inconvénient de nécessiter la connaissance préalable du débit symbole et surtout de l'indice de modulation. Or nous verrons au chapitre 5 qu'il est préférable de compenser l'effet du canal avant de procéder à l'estimation de l'indice.

Un autre type d'approche aveugle consiste à filtrer la suite d'échantillons  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  par un égaliseur numérique choisi de manière à ce qu'une certaine fonction de coût, dite fonction de contraste, soit minimale [15], [16], [17], [18]. Cette méthode est couramment employée lorsque le signal émis peut s'écrire comme une modulation linéaire d'une suite de symboles i.i.d., et a été abondamment étudiée dans ce cas précis.

Cependant, la philosophie générale de l'égalisation dans le contexte des CPM diffère assez sensiblement de celle qui sous-tend l'égalisation des signaux modulés linéairement par des suites i.i.d.. Dans le cas de modulations linéaires classiques, l'égaliseur fonctionne le plus souvent au rythme symbole. Ce choix s'explique par le fait que le signal reçu échantillonné au rythme symbole coïncide avec la sortie d'un filtre numérique excité par la suite des symboles. On comprend bien alors qu'il suffit d'inverser ce filtre numérique pour récupérer l'information utile. Donc, dans le cas de modulations linéaires classiques, l'extraction des symboles peut être effectuée directement grâce à un filtre égaliseur fonctionnant à la cadence symbole. Dans le cas des modulations CPM, la situation est plus complexe. Afin de mieux appréhender l'objectif et la mise en œuvre de l'étape d'égalisation, il est utile de souligner les points suivants.

- **Objectif de l'égalisation.**

Le signal CPM émis étant une fonction non linéaire des symboles, il est clair que la compensation du canal ne permet pas à elle seule d'estimer les symboles, à la différence du cas traditionnel des modulations linéaires. Au mieux, ce que l'on peut attendre de l'étape d'égalisation est de récupérer le signal CPM que l'on aurait reçu en absence de trajets multiples.

- **Période d'échantillonnage.**

Pour extraire les symboles, il reste encore à mettre œuvre un algorithme de synchronisation, suivi d'un démodulateur tel que ceux présentés au chapitre précédent. Afin que ces algorithmes soient aussi performants que possible, il est souhaitable que le signal qu'ils prennent en compte, c'est à dire le signal à temps discret obtenu en sortie de l'égaliseur, soit à un rythme suffisamment élevé. Ceci n'est possible qu'à condition que l'égaliseur fonctionne lui-même à une cadence supérieure au débit symbole.

- **Faisabilité de la compensation du canal grâce à un égaliseur numérique.**

Il convient de mentionner que, si  $T_e$  désigne la période d'échantillonnage, les échantillons  $(y(n) = y_a(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$  du signal reçu ne peuvent pas, sauf exception, s'écrire comme la sortie d'un filtre numérique excité par le signal CPM échantillonné. Nous verrons plus loin que si  $T_e = T_s$ , les signaux CPM à réponse complète vérifient néanmoins cette propriété agréable quel que soit le canal de transmission considéré. En revanche, dès que nous nous plaçons dans un autre cas que celui-ci, alors, hormis bien sûr pour certains canaux de transmission bien particuliers tels que les mono-trajets, il n'y a en général pas moyen d'exprimer  $(y_a(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$  comme le résultat d'un filtrage numérique de  $(s_a(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Ceci est dû au fait que les modulations CPM sont à bande théoriquement illimitée<sup>1</sup>. Pour la plupart des canaux de transmission, il n'est donc pas envisageable de récupérer exactement le signal  $(s_a(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$  par le biais d'un égaliseur numérique excité par les échantillons du signal reçu.

Bien entendu, la largeur de bande "effective" des signaux CPM est en pratique limitée. Par conséquent, si la fréquence d'échantillonnage vérifie *pratiquement* la condition de Shannon, alors il existe un filtre égaliseur numérique dont la sortie se rapproche autant que l'on veut du signal source échantillonné  $(s_a(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Malgré l'impossibilité théorique d'inverser le canal *après* échantillonnage, l'égalisation numérique de modulations CPM est donc tout à fait envisageable *en pratique*.

### Critère du module constant

La plus populaire des fonctions de coût utilisées pour déterminer le filtre égaliseur est sans aucun doute le *critère du module constant*, introduit dans [1] et étudié ensuite par de nombreux auteurs [19], [20], [21]. Ce critère est minimal lorsque le signal en sortie de l'égaliseur est de module constant. Si le signal émis est une modulation linéaire d'une suite i.i.d., alors, sous certaines conditions et notamment en l'absence de bruit, la minimisation du critère du module constant conduit à une égalisation parfaite (zero-forcing) du signal reçu. En revanche, aucune étude dans la littérature ne permet de juger de la pertinence d'une approche par minimisation de fonctions de contraste dans le cas où un signal CPM

<sup>1</sup>La représentation de Laurent permet en effet d'exprimer tout signal CPM comme une somme de modulations linéaires dont les fonctions de mise en forme sont de support temporel compact, et donc de support fréquentiel infini.

est émis. En effet, les arguments qui permettent de justifier l'utilisation des fonctions de contraste dans le cas classique de modulations linéaires ne sont plus valides pour des modulations CPM. Pourtant, étant donné que le signal CPM émis possède lui-même un module constant, on est en droit de penser que l'emploi du critère du module constant devrait permettre d'égaliser le signal reçu.

### 3.1.4 Organisation du chapitre

Après avoir brièvement passé en revue les techniques d'égalisation de signaux CPM proposées jusqu'ici, nous nous intéressons au critère du module constant. Puisque les modulations CPM sont à enveloppe constante ( $s_a(t)$  est de module égal à 1 pour tout  $t$ ), il semble légitime d'imposer la propriété de module constant en sortie de l'égaliseur indépendamment de la période d'échantillonnage choisie. Le critère du module constant est classiquement défini pour une période d'échantillonnage correspondant à la période symbole. Nous commençons donc par généraliser ce critère afin de lui donner un sens quel que soit la période d'échantillonnage.

D'après les remarques faites au paragraphe précédent, nous savons qu'en règle générale, aucun égaliseur numérique ne permet de compenser *exactement* le canal. Dans ces conditions, il n'y a donc guère de sens à rechercher les minima globaux du critère du module constant. Pourtant nous avons vu que des solutions *pratiques* existent dès lors que la fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée, et il est donc légitime de se demander quelles sont ces solutions. Cette caractérisation nécessite de se placer dans un cadre théorique plus large que celui de l'égalisation numérique, et dans lequel il existe toujours un égaliseur permettant d'inverser le canal. Ceci peut être réalisé en nous plaçant dans le contexte plus large où l'égaliseur est mis en œuvre *avant* l'échantillonnage (*i.e.* égalisation analogique). Grâce à cette hypothèse, il est parfaitement envisageable de mettre en évidence les minima globaux du critère du module constant. Bien qu'irréalisable en pratique, le contexte de l'égalisation analogique est néanmoins équivalent à celui de l'égalisation numérique dès lors que la fréquence d'échantillonnage est suffisante.

Une fois le problème correctement posé, nous étudions les solutions du critère du module constant. Bien entendu, les solutions que nous comptons mettre en évidence n'auront de sens que dans la mesure où le cadre théorique que nous nous sommes fixé afin de résoudre le problème constitue une approximation raisonnable du contexte pratique de l'égalisation numérique, c'est à dire lorsque la fréquence d'échantillonnage est suffisante. Malgré cela, nous montrons que, même dans l'hypothèse d'une fréquence d'échantillonnage élevée, la caractérisation des solutions du critère du module constant passe nécessairement par l'étude du cas où la période d'échantillonnage coïncide avec la période symbole. Nous commençons donc par mettre en évidence les solutions dans ce cas précis, à titre d'étape nécessaire avant une généralisation au cas d'une fréquence d'échantillonnage plus élevée.

Nous traitons d'abord le cas de CPM à réponse complète. Nous mettons en évidence les solutions du critère du module constant lorsque  $T_e = T_s$ . Même si le cas  $T_e = T_s$  ne constitue qu'une étape intermédiaire avant la généralisation des résultats, il est commode de discuter des solutions dans ce cas précis car leur expression est relativement simple et informative. Nous généralisons ensuite les résultats au cas d'une période d'échantillonnage quelconque, ce qui constitue en fin de compte le cas d'intérêt. Nous suivons ensuite la même

démarche dans le cas de CPM à réponse partielle. Toutefois dans ce cas, nous n'avons pas été en mesure de fournir une caractérisation totale des solutions. Nous nous contentons de mettre en évidence des contraintes fortes portant sur les solutions, et nous mentionnons des exemples de solutions afin bien cerner l'ensemble des minima globaux.

Dans tous les cas, nous montrons en particulier que des solutions indésirables existent. Enfin, nous évaluons par simulation les performances de l'algorithme du module constant ou CMA (Constant Modulus Algorithm, [1]). Le CMA permet d'adapter les coefficients d'un égaliseur numérique afin de minimiser le critère du module constant en sortie. Nous constatons qu'en dépit de l'existence de solutions indésirables, l'utilisation successive du CMA et d'un algorithme de synchronisation et de démodulation permet d'obtenir des taux d'erreur binaire très satisfaisants.

## 3.2 Revue des méthodes proposées dans la littérature

Les méthodes d'égalisation aveugle proposées jusqu'ici sont applicables lorsque :

- la période symbole  $T_s$  est connue ;
- le résidu de porteuse  $\delta f_0$  est nul (i.e. le signal reçu a pu être parfaitement ramené en bande de base) ;
- l'indice de modulation  $h$  est connu.

### 3.2.1 Identification aveugle par maximisation de la vraisemblance

Le plus grand nombre de travaux concernant l'égalisation aveugle de modulations CPM repose sur une approche consistant à estimer les paramètres dont dépend la réponse du canal. Une fois le canal identifié, la démodulation devient possible. L'estimation des paramètres du canal est basée sur le critère du maximum de vraisemblance. Cette technique a d'abord été développée dans le cadre général où le signal émis correspond à une chaîne de Markov cachée [22] avant d'être particularisée au cas des modulations CPM [12].

Afin d'exposer aussi simplement que possible le principe de la méthode, nous nous plaçons ici dans le cas où la période d'échantillonnage  $T_e$  coïncide avec la période symbole  $T_s$ . Signalons toutefois que [12] permet d'étendre le procédé au cas d'un facteur de suréchantillonnage entier, i.e.  $T_e = \frac{T_s}{M}$  où  $M$  est un entier strictement positif. Le signal de sortie  $y_a(t)$  est échantillonné à la période symbole  $T_e = T_s$ . On note  $h_a(t)$  la réponse impulsionnelle du filtre correspondant aux actions successives du canal de propagation et du filtre de réception sur le signal émis. L'approche décrite ici nécessite de supposer que les échantillons  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  du signal reçu peuvent s'écrire comme le résultat du filtrage numérique de la suite des échantillons du signal émis  $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  par un filtre  $h(z) = \sum_k h_k z^{-k}$  modélisant l'effet du canal de propagation :

$$y(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k s(n - k) + b(n). \quad (3.1)$$

La suite  $(b(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  correspond à un bruit supposé blanc, gaussien et de variance  $\sigma^2$ . Comme nous l'avons expliqué, ce type de modèle équivalent à temps discret n'est en fait justifié que pour des CPM à réponse complète. Dans le cas de CPM à réponse partielle, le membre de droite de (3.1) ne constitue qu'une approximation des échantillons reçus. Afin que cette modélisation soit aussi fine que possible, il faudrait que la période d'échantillonnage vérifie *numériquement* la condition de Shannon. Autrement dit, il faudrait se placer comme dans [12] dans le cas d'un suréchantillonnage. Notre objectif n'étant ici que de présenter le

principe de la méthode, nous considérons malgré tout que  $T_e = T_s$ . La généralisation au cas d'un facteur de suréchantillonnage entier supérieur à 1 ne pose toutefois pas de difficulté.

A ce stade, la méthode requiert de supposer que le filtre numérique de fonction de transfert  $\sum_k h_k z^{-k}$  est à réponse impulsionnelle *finie* : nous considérons par exemple que seuls les coefficients  $h_0, \dots, h_D$  sont non nuls, où  $D$  est un entier naturel. Enfin, le signal à temps discret  $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  correspond aux échantillons du signal d'entrée, i.e.  $s(n) = s_a(nT_s)$ . L'expression de  $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  en fonction des symboles  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  découle de (2.17). Ainsi, pour tout  $n \geq -D$ ,

$$s(n) = \exp i \left( \theta_0 + \pi h \sum_{j=-D-L+1}^{n-L} a_j + \pi h \sum_{j=0}^{L-1} \phi_j a_{n-j} \right). \quad (3.2)$$

Dans l'équation ci-dessus, les coefficients  $(\phi_j)_{j=0..L-1}$  sont définis pour tout  $j = 0, \dots, L-1$  par  $\phi_j = \phi_a(jT_s)$  et sont supposés inconnus, à l'exception de  $\phi_0$  qui est nul par définition de  $\phi_a(t)$ . Le paramètre  $\theta_0$  correspond ici à la phase initiale :  $\exp i\theta_0 = \exp i\pi h \sum_{j=-\infty}^{-D-L} a_j$ . Puisque  $\theta_0$  est inconnue, les coefficients  $h_0, \dots, h_D$  ne peuvent être déterminés qu'à une rotation de phase près. Afin de lever cette indétermination, nous supposons dans la suite que  $\theta_0 = 0$ .

On cherche à identifier le vecteur  $\mathbf{h} = [h_0, \dots, h_D]^T$  des coefficients du canal en utilisant le critère du maximum de vraisemblance. On note  $\mathbf{y} = [y(0), \dots, y(N-1)]^T$  le vecteur des échantillons, où  $N$  représente le nombre d'échantillons observés. De même, on désigne par  $\mathbf{a} = [a_{-D-L+1}, \dots, a_{N-2}]^T$  le vecteur des  $N + L + D - 2$  symboles intervenant pendant la durée de l'observation. Afin de simplifier la présentation de ce qui suit, nous supposons que la variance  $\sigma^2$  du bruit est connue du récepteur. Néanmoins, la procédure décrite ci-dessous peut être étendue sans difficulté au cas où  $\sigma^2$  est inconnue.

L'estimation de  $\mathbf{h}$  au sens du maximum de vraisemblance revient à estimer conjointement l'ensemble des paramètres inconnus, c'est à dire le vecteur  $\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{h}^T, \phi_1, \dots, \phi_{L-1}]^T$ . La *vraisemblance des données observées*  $p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta})$  peut être calculée en moyennant  $p(\mathbf{y}, \mathbf{a}/\boldsymbol{\theta})$  sur toutes les valeurs possibles de la séquence de symboles  $\mathbf{a}$  :

$$p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\mathbf{a} \in \{-1, +1\}^{N+L+D-2}} p(\mathbf{y}, \mathbf{a}/\boldsymbol{\theta}). \quad (3.3)$$

$p(\mathbf{y}, \mathbf{a}/\boldsymbol{\theta})$  est traditionnellement appelée la *vraisemblance des données complètes*. On constate que la maximisation directe de (3.3) par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$  requiert  $O(2^N)$  opérations pour chaque valeur possible du vecteur des paramètres  $\boldsymbol{\theta}$ . L'implémentation d'une telle méthode d'identification n'est donc pas envisageable en pratique. L'utilisation de l'algorithme EM (ou algorithme de Baum-Welch) [14] permet de réduire considérablement le coût de calcul. Il s'agit d'un algorithme itératif générant une estimée  $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$  de  $\boldsymbol{\theta}$  à chaque itération  $k$ , et tel que la suite  $(\boldsymbol{\theta}^{(k)})_{k \geq 1}$  converge vers un maximum local ou global de la fonction de vraisemblance des données observées  $\boldsymbol{\theta} \rightarrow p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta})$ . À la  $(k+1)$ ème itération, l'estimée  $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$  est définie par  $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ , où  $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$  est l'espérance conditionnelle du log-vraisemblance des données complètes :

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = E \left( \log p(\mathbf{y}, \mathbf{a}/\boldsymbol{\theta}) / \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right). \quad (3.4)$$

À chaque itération, il est d'abord nécessaire d'évaluer la fonction  $\boldsymbol{\theta} \rightarrow Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$  (Expectation step) puis de maximiser cette fonction par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$  (Maximization step).

À première vue, il semble que l'évaluation de (3.4) requiert de moyennner la vraisemblance des données complètes sur l'ensemble des  $2^{N+D+L-2}$  valeurs possibles de  $\mathbf{a}$ . Toutefois, nous avons vu lors de la présentation du démodulateur cohérent que cette étape peut être grandement simplifiée en remarquant que les échantillons  $(y(n))_{n=0\dots N-1}$  correspondent à un modèle de Markov caché ([12], [22]). Afin de mettre cette propriété en évidence, il nous suffit de suivre le même type de raisonnement qu'au paragraphe 2.2.2.

- Pour tout  $n = 0, \dots, N-1$ ,  $y(n)$  dépend de  $s(n), s(n-1), \dots, s(n-D)$ . En utilisant (3.2), on s'aperçoit en outre que les échantillons  $s(n), s(n-1), \dots, s(n-D)$  dépendent des seuls symboles  $a_{n-1}, \dots, a_{n-D-L+1}$  et de la phase cumulée  $\Theta_n = \sum_{j=-D-L+1}^{n-D-L} a_j$ . Par conséquent, (3.1) peut s'écrire sous la forme  $y(n) = F_{\boldsymbol{\theta}}(\xi(n)) + b(n)$ , où  $F_{\boldsymbol{\theta}}$  est une certaine application et où  $\xi(n)$  est le vecteur d'état défini par  $\xi(n) = [e^{i\Theta_n}, a_{n-D-L+1}, \dots, a_{n-1}]^T$ .
- Faisons l'hypothèse que l'indice de modulation  $h$  est rationnel ( $h = p/q$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux). Comme au paragraphe 2.2.2, on peut montrer que, lorsque  $n$  varie, le vecteur d'état  $\xi(n)$  appartient à un ensemble restreint de valeurs. En effet, nous avons vu que  $\Theta_n$  décrit modulo  $2\pi$  l'ensemble  $\mathcal{S}$  défini par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{S} = \left\{ 0, \frac{\pi p}{q}, \dots, \frac{(q-1)\pi p}{q} \right\} & \text{si } p \text{ est pair,} \\ \mathcal{S} = \left\{ 0, \frac{\pi p}{q}, \dots, \frac{(2q-1)\pi p}{q} \right\} & \text{si } p \text{ est impair.} \end{array} \right.$$

Le vecteur d'état  $\xi(n) = [e^{i\Theta_n}, a_{n-D-L+1}, \dots, a_{n-1}]^T$  appartient donc à l'ensemble  $\Xi$  défini par :

$$\Xi = \left\{ [e^{i\Theta}, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{D+L-1}]^T \mid \Theta \in \mathcal{S}, \epsilon_1 = \pm 1, \dots, \epsilon_{D+L-1} = \pm 1 \right\}.$$

Après quelques calculs, on constate que  $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$  peut être défini comme l'argument du minimum de la fonction  $\boldsymbol{\theta} \rightarrow R(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k+1)})$  définie par :

$$R(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k+1)}) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\xi \in \Xi(n)} |y(n) - F_{\boldsymbol{\theta}}(\xi)|^2 p(\xi(n) = \xi / \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(k)}), \quad (3.5)$$

où  $\xi \rightarrow p(\xi(n) = \xi / \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$  représente la densité de probabilité conditionnelle de  $\xi(n)$  sachant  $\mathbf{y}$  et sachant la valeur  $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$  des paramètres obtenue à l'étape  $k$  de l'algorithme. L'évaluation de (3.5) nécessite d'évaluer les coefficients  $p(\xi(n) = \xi / \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$  pour tout  $n$ . Ceci peut être réalisé en appliquant l'algorithme dit *forward-backward* [14].

Nous signalons enfin qu'une variante du procédé ci-dessus a récemment été proposée dans [23]. Elle repose sur l'algorithme EMVA (Expectation Maximisation Viterbi Algorithm) et permet en particulier de s'affranchir du calcul des probabilités conditionnelles  $(p(\xi(n) = \xi / \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(k)}))_{n=0\dots N-1}$  au prix d'une détection des symboles à chaque itération par un algorithme de Viterbi.

**Remarque 3.2 :** *Jusqu'ici, nous avons fait l'hypothèse que la fréquence porteuse du signal reçu est parfaitement connue et que le signal reçu a pu être parfaitement ramené en bande de base. En pratique, un résidu de fréquence porteuse  $\delta f_0$  inconnu subsiste au niveau du*

signal reçu. Les échantillons observés  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , anciennement définis par (3.1), vérifient cette fois :

$$y(n) = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k s(n-k) \right) e^{2i\pi\delta f_0 T_e n} + b(n), \quad (3.6)$$

où  $(b(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  représente un bruit blanc gaussien. L'approche précédente peut être adaptée : il suffit pour cela de compter l'inconnue supplémentaire  $\delta f_0$  parmi les composantes du vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  des paramètres à estimer. La fonction de coût  $\boldsymbol{\theta} \rightarrow R(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$  peut sans difficulté être recalculée en tenant compte du résidu de fréquence porteuse. La méthode peut donc être adaptée au prix d'une augmentation du nombre de paramètres à estimer.

### 3.2.2 Autres méthodes existantes

#### Le cas MSK : Méthode basée sur la corrélation conjuguée

Nous mentionnons que, dans le cas particulier où la modulation CPM est de type MSK (modulation 1REC d'indice  $\frac{1}{2}$ ), une méthode proposée par [24] permet d'identifier les coefficients du canal de transmission en utilisant la propriété de non circularité de la modulation MSK. En effet, si  $(s(n) = s_a(nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  désigne une version échantillonnée du signal MSK émis, on peut se convaincre que l'espérance conditionnelle  $E(s(n)^2/s(0))$  de  $s(n)^2$  sachant  $s(0)$  est non nulle<sup>2</sup>. L'idée consiste alors à exprimer les coefficients de la corrélation conjuguée des échantillons du signal reçu en fonction des coefficients du canal. Ceci conduit à montrer que les coefficients du canal correspondent aux solutions d'un système d'équations du second ordre. [24] montre comment l'identification des coefficients du canal peut être réalisée par des techniques linéaires.

#### Méthodes basées sur des critères d'entropie

Ces techniques consistent à adapter les coefficients d'un égaliseur de manière à minimiser l'information mutuelle ou l'entropie du signal de sortie [26], [27], [28]. En pratique, les critères présentent de nombreux minima locaux. L'utilisation de tels algorithmes requiert donc une initialisation pertinente, qui peut être obtenue, par exemple, grâce à l'algorithme du module constant.

## 3.3 Égalisation aveugle par le critère du module constant

### 3.3.1 Présentation du critère du module constant

En pratique, le signal reçu  $y_a(t)$  est échantillonné à une certaine période  $T_e$ . Un filtre égaliseur numérique de fonction de transfert  $g(z)$  est appliqué aux échantillons  $(y(n) = y_a(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$  du signal reçu. On désigne par  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  la suite des échantillons en sortie de l'égaliseur, ce que l'on note :

$$z(n) = [g(z)]y(n).$$

L'égaliseur  $g(z)$  est déterminé de telle sorte qu'une certaine fonction de coût soit minimale. L'une des fonctions de coût les plus répandues est le critère du module constant.

<sup>2</sup>Ceci provient du fait qu'une modulation CPM d'indice  $1/2$  élevée au carré peut être vue comme une modulation d'indice entier, dont on sait, par exemple grâce à [25], qu'elle possède une composante déterministe.

### Cas classique d'un échantillonnage à la période symbole

Dans le cas où la période d'échantillonnage coïncide avec la période symbole, *i.e.*  $T_e = T_s$ , il est important de noter que  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite stationnaire. En effet, le signal analogique reçu  $y_a(t)$  est le résultat d'un filtrage linéaire par  $H(f)$  du signal cyclostationnaire  $s_a(t)$  et, par conséquent, est lui-même cyclostationnaire de période  $T_s$ . Il va donc de soi que le signal à temps discret  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}} = (y_a(nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  est stationnaire, et il en est de même pour la sortie de l'égaliseur  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Lorsque  $T_e = T_s$ , le critère du module constant proposé par Godard [1] est défini par :

$$J_{T_s}(g) = E ( (|z(n)|^2 - 1)^2 ). \quad (3.7)$$

Notons qu'une classe plus large de critères du module constant est en fait proposée dans [1]. Nous nous focaliserons toutefois sur l'expression (3.7). Nous faisons figurer l'indice " $T_s$ " dans la notation  $J_{T_s}(g)$  afin de rappeler que l'expression (3.7) repose sur l'hypothèse d'un échantillonnage à la période symbole. La définition ci-dessus conduit immédiatement à la propriété suivante.

#### Propriété 3.1 :

- $J_{T_s}(g) \geq 0$  ;
- $J_{T_s}(g) = 0$  si et seulement si la suite  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est de module constant égal à 1 :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, |z(n)|^2 = 1, \quad p.s.^3$$

Autrement dit, le critère pénalise les égaliseurs produisant des variations du module de la sortie et atteint sa borne inférieure lorsque le signal de sortie est de module constant égal à 1.

### Cas d'une période d'échantillonnage quelconque

Si  $T_e$  est quelconque, les signaux  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  sont en général non stationnaires. Par conséquent, la quantité  $E ( (|z(n)|^2 - 1)^2 )$  dépend de l'entier  $n$  choisi. Le critère du module constant, défini par (3.7) dans le cas où  $T_e = T_s$ , doit donc être redéfini dans le cas d'une période d'échantillonnage quelconque. Nous proposons de minimiser le critère suivant par rapport aux coefficients de l'égaliseur  $g(z)$  :

$$J_{T_e}(g) = \lim_{N_{obs} \rightarrow \infty} \frac{1}{N_{obs}} \sum_{n=0}^{N_{obs}-1} E ( (|z(n)|^2 - 1)^2 ). \quad (3.8)$$

Naturellement, les expressions (3.7) et (3.8) coïncident lorsque  $T_e = T_s$ .

### Mise en œuvre : l'algorithme du module constant (CMA)

En pratique, les coefficients du filtre égaliseur  $g(z) = \sum_k g_k z^{-k}$  qui minimisent le critère du module constant  $J_{T_e}$  sont obtenus grâce à un algorithme du gradient, appelé dans ce contexte l'algorithme du module constant (Constant Modulus Algorithm, CMA). La mise en œuvre et les propriétés de cet algorithme ont été largement étudiées dans la littérature, notamment dans [1], [17], [19], [20], [29].

<sup>3</sup>La notation p.s. signifie *presque sûrement*.

### 3.3.2 Résultat classique pour une modulation linéaire d'une suite i.i.d. circulaire

De nombreux travaux ont porté sur les propriétés du CMA dans le cas où le signal émis est une modulation linéaire d'une suite de symboles i.i.d. et circulaire au second ordre [1], [17], [19]. Comme nous l'avons expliqué au début de ce chapitre, la période d'échantillonnage considérée dans ce cas précis est égale à la période symbole. On cherche donc ici à caractériser les minima globaux du critère  $J_{T_s}(g)$ .

Afin de présenter brièvement ces résultats bien connus, nous nous plaçons le temps d'un paragraphe dans le contexte d'émission suivant. Considérons une suite de symboles  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  i.i.d., de moyenne nulle, circulaire au second ordre (i.e.  $E(x(n+k)x(n)) = 0$  pour tout entier  $k$ ), et dont le cumulatif d'ordre 4 est strictement négatif (i.e.  $E(|x(n)|^4) - 2E(|x(n)|^2)^2 < 0$ ). On suppose que le signal émis est une modulation linéaire de la suite  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Si  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  désigne la suite des échantillons du signal reçu à la période symbole, on peut écrire que

$$y(n) = [h(z)]x(n), \quad (3.9)$$

où  $h(z)$  est la fonction de transfert d'un filtre numérique qui représente l'effet du canal de transmission. En sortie du filtre égaliseur, on récupère le signal  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , qui peut également s'exprimer comme un filtrage numérique des symboles d'entrée :

$$z(n) = [f(z)]x(n), \quad (3.10)$$

où  $f(z) = h(z)g(z)$ . Le résultat suivant a été établi, notamment dans [17] :

**Résultat 3.1 :** *Si l'égaliseur  $g(z)$  minimise la fonction de coût  $J_{T_s}(g)$  donnée par (3.7), alors  $f(z)$  est un filtre trivial du type :*

$$f(z) = \lambda z^{-K}, \quad (3.11)$$

où  $\lambda$  est un coefficient complexe et où  $K$  est un entier.

En d'autres termes, le signal  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  récupéré en sortie de l'égaliseur correspond à la suite  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  des symboles, à un retard et un facteur de gain près : pour tout entier  $n$ ,  $z(n) = \lambda x(n - K)$ . Une fonction de coût vérifiant le résultat 3.1 est appelée une *fonction de contraste*.

Bien entendu, la propriété précédente n'est valide que dans le cas où le signal émis est une modulation linéaire d'une suite i.i.d. et circulaire<sup>4</sup>. En revanche, aucune caractérisation des solutions du critère du module constant n'existe à notre connaissance pour le cas de modulations non linéaires CPM. Malgré cela, il semble pertinent d'utiliser le critère du module constant pour des modulations CPM : puisque le signal d'entrée est de module constant, il semble en effet naturel d'imposer la propriété de module constant en sortie d'égaliseur. Il reste alors à caractériser les solutions de ce critère.

<sup>4</sup>Il a été démontré dans [30] que ce résultat peut être étendu à un ensemble plus vaste de séquences  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  ne vérifiant pas nécessairement la condition i.i.d.. Toutefois, cette généralisation ne permet pas de prendre en compte le cas de modulations CPM.

### 3.3.3 Cadre théorique de l'égalisation dans le cas de modulations CPM

Nous avons expliqué au paragraphe 3.1.3 que, quelle que soit la période d'échantillonnage considérée, il n'est en général pas possible de récupérer *exactement* en sortie d'égaliseur le signal qui aurait été observé en l'absence de trajets multiples. Rappelons que ceci est dû au fait que les signaux CPM sont à bande illimitée : pour la plupart des canaux  $h_a(t)$ , il est en général impossible de compenser l'effet de  $h_a(t)$  par un filtre numérique. En toute rigueur, aucun algorithme d'égalisation numérique ne garantit une compensation exacte de l'effet du canal de transmission analogique. Il n'y a donc guère de sens à rechercher les solutions de l'équation

$$J_{T_e}(g) = 0 \quad (3.12)$$

dans le cas de modulations CPM.

Toutefois, nous savons qu'en pratique, à condition de choisir une cadence d'échantillonnage suffisamment élevée, on peut trouver un égaliseur numérique dont la sortie  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est aussi proche que l'on veut de  $(s_a(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Autrement dit, nous savons qu'il existe des égaliseurs numériques tels que  $J_{T_e}(g)$  se rapproche de zéro. Il est donc tout à fait légitime de se demander quels sont ces égaliseurs et surtout quels sont les signaux de sortie qu'ils produisent. Pour pouvoir répondre à cette question, il est indispensable de définir un cadre théorique dans lequel le critère du module constant possède des solutions, *i.e.* dans lequel l'équation (3.12) a un sens et dans lequel la compensation exacte du canal est envisageable.

Ceci peut être réalisé en nous plaçant dans le contexte plus large d'une égalisation par filtrage analogique. Si en effet, plutôt que de chercher à compenser le canal de transmission *après* échantillonnage à  $T_e$ , nous cherchions au contraire à le compenser *avant* l'échantillonnage par le biais d'un filtre égaliseur analogique, alors il serait possible de récupérer le signal source. Il suffirait en effet que la réponse fréquentielle  $G(f)$  d'un égaliseur analogique coïncide avec l'inverse de la réponse fréquentielle du canal pour que l'effet du canal soit parfaitement compensé (égalisation zero-forcing). Dans ce cas, la sortie de l'égaliseur analogique coïnciderait avec le signal  $s_a(t)$  émis. Après échantillonnage, on récupérerait alors le signal à temps discret  $(z(n) = s_a(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$  (pour lequel, en particulier, la fonction de coût (3.8) est bien égale à zéro). Dans un tel cadre théorique, il devient légitime de rechercher les solutions du critère du module constant.

**Notations :** Dans la suite de ce chapitre, nous nous plaçons dans le contexte d'une égalisation analogique. Conformément au schéma synoptique de la figure 3.1, nous désignons à partir de maintenant par  $G(f)$  la réponse fréquentielle de l'égaliseur analogique appliqué au signal reçu  $y_a(t)$ . Nous désignons en outre par  $z_a(t)$  la sortie de ce filtre analogique, et par  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  les échantillons de  $z_a(t)$  à la période  $T_e$ .

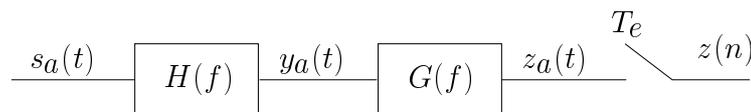


FIG. 3.1 – Schéma synoptique

Afin de faire la différence avec le cas pratique de l'égalisation numérique, nous désignons

par  $\mathcal{J}_{T_e}(G)$  le critère du module constant

$$\mathcal{J}_{T_e}(G) = \lim_{N_{obs} \rightarrow \infty} \frac{1}{N_{obs}} \sum_{n=0}^{N_{obs}-1} E(|z(n)|^2 - 1)^2. \quad (3.13)$$

**Remarque 3.3 :** *Bien entendu, un égaliseur analogique n'est pas implémentable en pratique. Mais il est possible de montrer que, lorsque la fréquence d'échantillonnage augmente, l'action d'un égaliseur analogique devient équivalente à celle d'un égaliseur numérique.*

### 3.3.4 Caractérisation des solutions : cadre théorique et approche retenue

Au sein du cadre théorique que nous nous sommes fixés au paragraphe précédent, notre objectif est à partir de maintenant de caractériser les cas où la réponse fréquentielle de l'égaliseur  $G(f)$  est telle que :

$$\mathcal{J}_{T_e}(G) = 0. \quad (3.14)$$

Bien entendu, il n'est pas très utile de caractériser la réponse fréquentielle de l'égaliseur lui-même, puisque celle-ci est fondamentalement liée au canal, dont on ne sait rien. Notre but est davantage de caractériser les signaux possiblement observés en sortie de l'égaliseur et après échantillonnage (soit  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ ) et qui assurent la nullité du critère du module constant.

Nous commençons par formuler un problème équivalent à (3.14) et plus commode à résoudre. Ce problème équivalent est énoncé par la proposition 3.1. Brièvement, il consiste à écrire que, lorsque le critère du module constant  $\mathcal{J}_{T_e}(G)$  est minimal (c'est à dire nul), alors le signal analogique  $z_a(t)$  en sortie de l'égaliseur  $G(f)$  doit être de module 1 au moins à certains instants  $t$ , ces instants étant fonctions de la période d'échantillonnage choisie. La proposition est due à la propriété de cyclostationnarité du signal  $z_a(t)$ .

**Proposition 3.1 :**

- Pour tout égaliseur  $G(f)$ ,  $\mathcal{J}_{T_e}(G) \geq 0$ .
- Dans le cas où  $T_e/T_s$  est irrationnel,  $\mathcal{J}_{T_e}(G) = 0$  si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, |z_a(t)| = 1, \text{ p.s.} \quad (3.15)$$

- Dans le cas où  $T_e/T_s$  est rationnel, on pose  $T_e/T_s = p/q$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux. Alors,  $\mathcal{J}_{T_e}(G) = 0$  si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \left| z_a\left(k \frac{T_s}{q}\right) \right| = 1, \text{ p.s.} \quad (3.16)$$

Bien que cette proposition soit une conséquence d'un résultat de [2], il nous a semblé utile de la démontrer dans notre contexte. La démonstration figure en annexe. Notre objectif est donc, à  $T_e$  fixé, de caractériser les signaux qui vérifient la condition de module constant (3.15) (si  $T_e/T_s$  est irrationnel) ou (3.16) (si  $T_e/T_s$  est rationnel).

La résolution du problème peut être effectuée en transformant légèrement la manière d'exprimer la proposition 3.1. En effet,

- Si  $T_e/T_s$  est irrationnel, la condition (3.15) est équivalente à dire que, presque sûrement, pour tout  $\tau \in [0, T_s[$ , l'affirmation suivante est vraie :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, |z_a(\tau + nT_s)| = 1. \quad (3.17)$$

- Si  $T_e/T_s$  est rationnel ( $T_e/T_s = p/q$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux), la condition (3.16) est équivalente à dire que, presque sûrement, pour tout  $\tau \in \{0, \frac{T_s}{q}, \dots, (q-1)\frac{T_s}{q}\}$  l'affirmation suivante est vraie :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, |z_a(\tau + nT_s)| = 1. \quad (3.18)$$

L'intérêt de l'observation ci-dessus est qu'elle va nous permettre de ramener la caractérisation des minima globaux du critère du module constant dans le cas général où la période d'échantillonnage est quelconque, à la caractérisation des solutions dans le cas où  $T_e = T_s$ .

Nous commençons par traiter au paragraphe 3.4 le cas de CPM à réponse complète pour lequel la mise en évidence des solutions est bien plus aisée. Puis nous étudions le cas de CPM à réponse partielle au paragraphe 3.5.

Toutefois, avant de mettre en évidence les solutions du critère du module constant, il est important d'être clair au sujet de ce que nous attendons de la procédure d'égalisation. Comme nous l'avons expliqué au début de ce chapitre, nous pouvons dans le meilleur des cas attendre d'un égaliseur qu'il restitue le signal que l'on aurait observé en l'absence de trajets multiples. Nous qualifions donc dans la suite de solution *souhaitable* tout cas de figure dans lequel le signal de sortie de l'égaliseur échantillonné à la période  $T_e$  vérifie :

$$z_a(nT_e) = s_a(nT_e - \delta)e^{i\varphi}, \quad (3.19)$$

où  $\delta$  est un retard quelconque et où  $\varphi$  est un déphasage quelconque. Au contraire, une solution indésirable correspond un cas de figure où l'équation précédente n'est pas vérifiée. En suivant le cheminement qui a permis de démontrer la proposition 3.1, on peut montrer que l'expression (3.19) a la conséquence suivante sur le signal  $z_a(t)$  observé en sortie de l'égaliseur. Supposons pour simplifier que  $T_e/T_s$  est irrationnel. Alors la condition (3.19) est équivalente à dire que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$z_a(t) = s_a(t - \delta)e^{i\varphi}. \quad (3.20)$$

Dans le cas où  $T_e/T_s$  est rationnel, il suffit que l'équation précédente soit vérifiée pour tout  $t \in \mathbb{Z}\frac{T_s}{q}$  pour garantir que la solution obtenue est une solution souhaitable.

### 3.4 Cas des CPM à réponse complète ( $L = 1$ )

Dans un premier temps, nous nous focalisons donc sur les modulations CPM à réponse complète, pour lesquelles la représentation de Laurent, particulièrement simple, permet de formuler le problème de façon plus commode. Nous supposons donc dans ce paragraphe que la longueur  $L$  de la fonction de mise en forme est égale à 1.

### 3.4.1 Représentation de Laurent et formulation du problème

Lorsque  $L = 1$ , la représentation de Laurent [11] permet d'écrire le signal  $s_a(t)$  émis comme une modulation linéaire d'une unique suite de pseudo-symboles. Ce résultat a été présenté au paragraphe 2.1.3. Nous utilisons ici les mêmes notations :  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  représente la suite de pseudo-symboles définie pour tout  $n$  par :

$$x(n) = \exp \left( i\pi h \sum_{j=-\infty}^n a_j \right). \quad (3.21)$$

On rappelle que  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite temporellement corrélée. Le signal émis peut s'écrire comme une modulation linéaire de la suite  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  par une fonction de mise en forme  $c(t)$  :

$$s_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)c(t - nT_s). \quad (3.22)$$

$c(t)$  représente la fonction de mise en forme de Laurent donnée par (2.11). En particulier,  $c(t)$  a pour support temporel l'intervalle  $[0, 2T_s]$ . L'équation (3.22) nous sert de point de départ pour formuler un problème équivalent qui rend la résolution de la condition de module constant plus commode.

#### ■ Problème équivalent

Si  $h_a(t)$  désigne la réponse impulsionnelle du canal, le signal reçu  $y_a(t)$  s'écrit donc :

$$y_a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k) \int_{\mathbb{R}} h_a(u)c(t - kT_s - u) du, \quad (3.23)$$

Le signal reçu fait l'objet d'un filtrage par l'égaliseur analogique de réponse fréquentielle  $G(f)$ . Afin d'exprimer le signal  $z_a(t)$  de sortie de l'égaliseur en fonction de la suite des pseudo-symboles, nous considérons le filtre de réponse fréquentielle

$$F(f) = G(f)H(f)C(f)$$

où  $C(f)$  représente la transformée de Fourier de  $c(t)$  et où l'on rappelle que  $H(f)$  désigne la réponse fréquentielle du canal de transmission.  $F(f)$  traduit donc les effets successifs de la mise en forme de Laurent, du canal de transmission et de l'égaliseur. Désignons par  $f(t)$  la réponse impulsionnelle du filtre correspondant. On obtient directement :

$$z_a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)f(t - kT_s). \quad (3.24)$$

Le signal de sortie d'égaliseur analogique peut donc s'écrire comme une modulation linéaire de la suite des pseudo-symboles.

Il nous suffit donc de caractériser la fonction  $f(t)$ , que nous supposons par ailleurs continue et de module au carré sommable. Restreignons nous pour simplifier au cas où  $T_e/T_s$  est irrationnel (le cas où  $T_e/T_s$  est rationnel peut être traité de la même manière, sans plus de difficulté). Supposons que la condition de module constant est vérifiée, i.e.  $\mathcal{J}_{T_e}(G) = 0$ . La proposition 3.1 permet alors d'écrire que pour tout  $\tau \in [0, T_s[$ , la suite  $(z_a(\tau + nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  est de module constant.

Soit  $\tau$  un réel quelconque de l'intervalle  $[0, T_s[$ . L'expression (3.24) permet d'exprimer la série temporelle  $(z_a(\tau + nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  de la manière suivante :

$$z_a(\tau + nT_s) = [f_\tau(z)]x(n), \quad (3.25)$$

où le filtre numérique  $f_\tau(z)$  est défini par :

$$f_\tau(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\tau + kT_s) z^{-k}. \quad (3.26)$$

Et comme les échantillons  $(z_a(\tau + nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  sont de module constant, nous pouvons écrire finalement que *pour tout*  $\tau \in [0, T_s[$ ,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |[f_\tau(z)]x(n)| = 1, \quad \text{p.s.} \quad (3.27)$$

Nous proposons donc dans un premier temps de fixer  $\tau \in [0, T_s[$ , et de caractériser les filtres  $f_\tau(z)$  qui vérifient la condition précédente. Il est clair que ceci revient à caractériser les solutions de la condition de module constant dans le cas où la période d'échantillonnage coïncide avec la période symbole.

Par conséquent, dans le paragraphe qui va suivre nous faisons l'hypothèse que  $T_e = T_s$ . Dans ce cas, la résolution de la condition de module constant (3.27) revient simplement à déterminer l'ensemble des filtre  $f(z)$  qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |[f(z)]x(n)| = 1, \quad \text{p.s.} \quad (3.28)$$

Nous caractérisons donc cet ensemble au paragraphe suivant, et nous nous servons de la solution obtenue afin de caractériser la fonction  $f(t)$  dans le cas général d'une période d'échantillonnage quelconque. Soulignons le fait que l'étude du cas d'un échantillonnage à la période symbole ne constitue qu'une étape intermédiaire avant la généralisation des résultats. Malgré cela, nous prendrons le temps de discuter des résultats obtenus dans le cas  $T_e = T_s$ , car les expressions sont plus informatives que dans le cas général.

### 3.4.2 Cas d'un échantillonnage à la période symbole

Nous supposons dans ce paragraphe que le signal  $z_a(t)$  produit par l'égaliseur analogique et défini par (3.24), est échantillonné à la période  $T_s$ . On désigne simplement par  $(z(n) = z_a(nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  les échantillons du signal égalisé. La démarche précédente a permis de montrer que ces échantillons vérifient :

$$z(n) = [f(z)]x(n), \quad (3.29)$$

où  $f(z)$  est la fonction de transfert définie par :

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT_s) z^{-k}.$$

Dans le cas d'un échantillonnage à la période symbole, la condition de module constant (3.27) revient simplement à

$$\forall n, \quad |[f(z)]x(n)| = 1 \quad \text{p.s.} \quad (3.30)$$

où le filtre numérique  $f_\tau(z)$  est défini par :

$$f_\tau(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\tau + kT_s) z^{-k}. \quad (3.31)$$

Les solutions de ce problème diffèrent selon que l'indice  $h$  de la modulation est un multiple de  $\frac{1}{2}$  ou non.

**Remarque 3.4 :** *Nous disposons donc dans le cas des CPM à réponse complète d'un modèle numérique équivalent très proche de celui qui, dans le cas de modulations linéaires classiques, conduit au résultat 3.1. En effet, le signal  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifie bien l'équation (3.10) comme dans le cas des modulations linéaires classiques. Il nous semble utile d'expliquer pourquoi, malgré ces similitudes, le résultat 3.1 n'est pas valable dans le contexte présent. La suite des pseudo-symboles  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est bien stationnaire, de moyenne nulle et son cumulatif d'ordre 4 est strictement négatif. Lorsque l'indice de modulation  $h$  n'est pas un multiple de  $\frac{1}{2}$ , on peut en outre vérifier que  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est bien circulaire à l'ordre 2 (i.e.  $E(x(n+k)x(n)) = 0$  pour tout entier  $k$ ). Les conditions d'application du résultat 3.1 sont donc respectées à l'exception d'une seule : la suite  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  n'est pas i.i.d.. En effet,  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifie  $x(n) = e^{i\pi h a_n} x(n-1)$  et elle est donc temporellement corrélée.*

*Lorsque  $h$  est un multiple de  $\frac{1}{2}$ ,  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est toujours une suite non i.i.d. Mais dans ce cas, cette suite est par ailleurs non circulaire<sup>5</sup> à l'ordre 2. Le résultat 3.1 est cette fois non valide car deux de ses conditions d'application font défaut.*

#### ■ Le cas $h \neq \frac{1}{2}$

Le résultat suivant est établi en annexe.

**Résultat 3.2 :** *Supposons que l'indice de modulation  $h$  ne soit pas un multiple de  $\frac{1}{2}$ . La condition (3.30) est vérifiée si et seulement si  $f(z)$  s'écrit*

$$f(z) = (e^{i\varphi} z^{-K}) \tilde{f}(z), \quad (3.32)$$

où  $K$  est un entier,  $\varphi \in ]-\pi, \pi]$  et où les coefficients  $(\tilde{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  du filtre  $\tilde{f}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_k z^{-k}$  sont définis par :

$$\begin{cases} \tilde{f}_0 = \frac{\sin \theta}{\sin \pi h} \\ \tilde{f}_1 = \frac{\sin(\pi h - \theta)}{\sin \pi h} \\ \tilde{f}_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \tilde{f}_0 = \frac{\sin \theta}{\sin \pi h} \\ \tilde{f}_1 = \frac{e^{-i\theta}}{i \tan \pi h} \\ \tilde{f}_2 = \frac{i \cos \theta}{\sin \pi h} \end{cases} \quad (3.33)$$

et où  $\tilde{f}_k = 0$  pour tout  $k$  différent de 0, 1, 2. Ici,  $\theta$  est un paramètre quelconque de l'intervalle  $[0, \pi[$ .

On appelle respectivement *filtres de type I* et *filtres de type II* les deux familles de filtres définies par (3.33). D'après le résultat ci-dessus, le filtre  $f(z)$  correspond à un filtre de type I ou de type II, à un retard et un déphasage près. En particulier, au plus trois coefficients de la suite  $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  sont susceptibles d'être non nuls et ces trois coefficients sont consécutifs.

<sup>5</sup>Mentionnons à nouveau que le signal  $(x(n)^2)_{n \in \mathbb{Z}}$  peut être interprété comme un signal CPM d'indice entier et qu'il a été démontré dans [25] qu'un tel signal présente une composante déterministe.

### Discussion

Le résultat 3.1, valide pour une modulation linéaire d'une suite i.i.d. et circulaire, n'est donc pas valable dans le contexte de modulations CPM. Un filtre  $f(z)$  solution de la condition de module constant (3.30) n'est pas nécessairement un filtre trivial. En pratique, doit-on pour autant considérer que l'égalisation a échoué lorsque le filtre solution  $f(z)$  obtenu est non trivial? Autrement dit, si la procédure d'égalisation conduit à un filtre  $f(z)$  non trivial, cela signifie-t-il nécessairement que nous sommes en présence d'une solution indésirable?

Nous allons voir que certains filtres solutions non triviaux sont des interpolateurs. Pour de tels filtres, il existe un retard  $\delta \in \mathbb{R}$  et un déphasage  $\varphi$  tels que la sortie de l'égaliseur vérifie

$$z(n) = s_a(nT_s - \delta)e^{i\varphi}$$

pour tout  $n$ . Autrement dit, on récupère dans ce cas le signal que l'on aurait observé en l'absence de trajets multiples. Les échantillons du signal égalisé vérifient bien la condition (3.19) que nous attendons de la procédure d'égalisation. Ce cas de figure correspond donc bien à une solution souhaitable. Parmi les solutions (3.33) de la condition de module constant (3.30), il est donc essentiel de caractériser celles qui sont des interpolateurs.

En revanche, si  $f(z)$  est tel que la sortie  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  ne correspond pas à une version échantillonnée du signal émis, alors il s'agit par définition d'une solution indésirable.

• *Filtres de type I.* Considérons par exemple que  $f(z)$  est un filtre de type I (pour simplifier les expressions suivantes, le retard  $K$  et le déphasage  $\varphi$  définis par (3.32) sont supposés nuls). Dans ce cas, la suite  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est telle que pour tout entier  $n$ ,

$$z(n) = \frac{\sin \theta}{S} x(n) + \frac{\sin(\pi h - \theta)}{S} x(n-1), \quad (3.34)$$

où  $\theta$  est un paramètre de l'intervalle  $[0, \pi[$  et où  $S = \sin \pi h$ . Puisque  $x(n) = \exp(i\pi h a_n) x(n-1)$ , on obtient immédiatement :

$$z(n) = \left( \frac{\sin \theta}{S} e^{i\pi h a_n} + \frac{\sin(\pi h - \theta)}{S} \right) x(n-1).$$

En utilisant une égalité semblable à (2.6), on constate que le premier facteur du membre de droite de l'expression ci-dessus est égal à  $\exp(i\theta a_n)$ . En remplaçant  $x(n-1)$  par sa définition, on obtient l'expression finale de  $z(n)$  :

$$z(n) = \exp \left( i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-1} a_j + i\theta a_n \right). \quad (3.35)$$

Nous tâchons maintenant de savoir à quelle condition sur  $\theta$  le signal ci-dessus peut être vu comme une version échantillonnée du signal émis  $s_a(t)$ .

Si  $0 \leq \theta \leq \pi h$ . La fonction  $\phi_a(t)$  étant continue, croissante, nulle en  $t = 0$  et égale à un en  $t = T_s$ , elle établit une bijection de  $[0, T_s]$  dans  $[0, 1]$ . Il existe donc un réel  $\delta \in [0, T_s]$  tel que  $\theta = \pi h \phi_a(\delta)$ . Dans ce cas, on voit immédiatement que :

$$z(n) = s_a(nT_s + \delta). \quad (3.36)$$

Le signal de sortie de l'égaliseur peut donc s'écrire comme une version échantillonnée du signal d'entrée. Le filtre  $f(z)$  est un filtre interpolateur.

Si  $\pi h < \theta < \pi$ . Alors il n'existe aucun réel  $\delta$  susceptible de vérifier  $\theta = \pi h \phi_a(\delta)$ . Le filtre  $f(z)$  n'est pas un interpolateur. (Remarquons que ce cas ne se produit que lorsque l'indice  $h$  est inférieur à un).

• *Filtres de type II.* De simples calculs (c.f. annexe B.2) permettent de se convaincre que si  $f(z)$  est un filtre de type II (on choisit comme précédemment  $K = 0$  et  $\varphi = 0$ ), alors le signal de sortie  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifie pour tout  $n$  :

$$z(n) = a_{n-1} \exp \left( i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-1} a_j + i\theta a_{n-1} a_n \right). \quad (3.37)$$

On peut alors vérifier que contrairement au signal CPM d'entrée, la phase de  $z(n)$  n'est pas une fonction linéaire de la suite des symboles  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Un filtre  $f(z)$  ayant trois coefficients non nuls ne peut pas être un interpolateur.

■ **Le cas  $h = \frac{1}{2}$**

Dans le cas où l'indice de modulation  $h$  est égal à  $\frac{1}{2}$  (e.g. modulation MSK), une approche différente doit être mise en œuvre afin de caractériser les solutions de la condition de module constant (3.30).

L'équation (3.21) devient dans ce cas :

$$x(n) = ia_n x(n-1) \quad (3.38)$$

pour tout entier  $n$ . De plus  $x(0)$  appartient à l'ensemble  $\{1, i, -1, -i\}$ , et donc les pseudo-symboles  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  sont successivement réels et imaginaires purs. On pose alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$u(n) = \frac{x(n)}{i^n}. \quad (3.39)$$

Ainsi,  $(u(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite stationnaire i.i.d., de moyenne nulle, qui vérifie pour tout  $n$  :  $u(n) = a_n u(n-1)$ . Il s'agit donc d'une suite réelle ou d'une suite imaginaire, selon la valeur de  $x(0)$ . Nous supposons sans restriction que  $(u(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite réelle.

Le signal de sortie  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  peut être exprimé de la manière suivante pour tout  $n$  :

$$\begin{aligned} z(n) &= i^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{f}_k u(n-k) \\ &= i^n ([\bar{f}(z)]u(n)), \end{aligned} \quad (3.40)$$

où les coefficients du filtre  $\bar{f}(z) = \sum_k \bar{f}_k z^{-k}$  sont définis pour tout entier  $k$  par  $\bar{f}_k = i^{-k} f_k$ . Mettre en évidence les filtres  $f(z)$  vérifiant la propriété (3.30) revient donc à caractériser l'ensemble des filtres  $\bar{f}(z)$  tels que la série temporelle  $([\bar{f}(z)]u(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est de module constant pour toute suite  $(u(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  de symboles binaires. Or cet ensemble a récemment été caractérisé par Houcke et al. [31] L'utilisation de [31] permet alors d'énoncer le résultat suivant :

**Résultat 3.3 :** *Supposons que l'indice de modulation  $h$  soit égal à  $\frac{1}{2}$ . La propriété (3.30) est vérifiée si et seulement si  $f(z)$  s'écrit*

$$f(z) = (e^{i\varphi} z^{-K}) \tilde{f}(z), \quad (3.41)$$

où  $K$  est un entier,  $\varphi \in ]-\pi, \pi]$  et où les coefficients  $(\tilde{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  du filtre  $\tilde{f}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_k z^{-k}$  sont définis par :

$$\begin{cases} \tilde{f}_0 &= i^{(-P+1)} \sin \theta \\ \tilde{f}_P &= \cos \theta \end{cases} \quad (3.42)$$

et  $\tilde{f}_k = 0$  pour tout  $k$  différent de 0 et  $P$ .

$P$  est ici un entier strictement positif et  $\theta$  est un paramètre de l'intervalle  $[0, \pi[$ .

On peut facilement se convaincre que le signal de sortie  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  d'un tel filtre égaliseur est de module constant. Soit  $f(z)$  un filtre solution. Supposons pour simplifier l'écriture de ce qui suit que le retard  $K$  et le déphasage  $\varphi$  sont nuls. Il existe alors un entier  $P$  strictement positif et un réel  $\theta \in [0, \pi[$  tels que les coefficients de  $f(z)$  vérifient (3.42). Donc, pour tout  $n$ ,

$$z(n) = i^{-P+1} \sin \theta x(n) + \cos \theta x(n - P). \quad (3.43)$$

En utilisant l'équation (3.38), on peut facilement exprimer  $x(n)$  en fonction de  $x(n - P)$  :

$$x(n) = i^P \left( \prod_{j=0}^{P-1} a_{n-j} \right) x(n - P).$$

En réinjectant l'égalité ci-dessus dans (3.43), on obtient :

$$z(n) = \left( \cos \theta + i \left( \prod_{j=0}^{P-1} a_{n-j} \right) \sin \theta \right) x(n - P).$$

Puisque les symboles sont binaires, le produit  $\prod_{j=0}^{P-1} a_{n-j}$  est égal à  $\pm 1$ . Ceci permet finalement d'écrire :

$$z(n) = \exp \left( i\theta \prod_{j=0}^{P-1} a_{n-j} \right) x(n - P) \quad (3.44)$$

$$= \exp \left( i\frac{\pi}{2} \sum_{j=-\infty}^{n-P} a_j + i\theta \prod_{j=0}^{P-1} a_{n-j} \right). \quad (3.45)$$

Par conséquent, le module de  $z(n)$  est bien égal à 1 pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Plus précisément, la suite  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  prend ses valeurs dans la constellation  $\{e^{\pm i\theta}, ie^{\pm i\theta}, -e^{\pm i\theta}, -ie^{\pm i\theta}\}$ .

Comme au paragraphe précédent, il s'agit maintenant de savoir quels sont les filtres solutions du critère du module constant qui sont des filtres interpolateurs.

- Si  $P = 1$ , l'expression (3.45) devient :

$$z(n) = \exp \left( i\frac{\pi}{2} \sum_{j=-\infty}^{n-1} a_j + i\theta a_n \right).$$

Deux cas se présentent alors.

- Si  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Il existe un réel  $\delta \in [0, T_s]$  tel qu'on puisse écrire  $\theta = \frac{\pi}{2} \phi_a(\delta)$ . On obtient alors que  $z(n) = s_a(nT_s + \delta)$  pour tout  $n$ . Le filtre solution est un interpolateur.

- Si  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ . Dans ce cas,  $f(z)$  est une solution indésirable.
- Si  $P > 1$ ,
  - Si le paramètre  $\theta$  appartient à l'ensemble  $\{0, \frac{\pi}{2}\}$ , alors  $f(z)$  ne comporte qu'un seul coefficient non nul. Il s'agit donc d'un filtre trivial (et *a fortiori* d'une solution satisfaisante).
  - En revanche, tant que  $\theta$  est quelconque,  $f(z)$  est une solution indésirable.

### 3.4.3 Cas d'une période d'échantillonnage quelconque

Nous utilisons maintenant les résultats précédents afin de caractériser les minima globaux du critère du module constant dans le cas d'une période d'échantillonnage quelconque.

Nous nous plaçons pour simplifier dans le cas où  $T_e/T_s$  est irrationnel, mais le raisonnement est le même lorsque  $T_e/T_s$  est rationnel. Nous rappelons que la condition de module constant revient dans ce cas à :

$$\forall \tau \in [0, T_s[, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad |[f_\tau(z)]x(n)| = 1, \quad \text{p.s.} \quad (3.46)$$

Or, pour  $\tau$  fixé, les solutions de (3.27) ont été caractérisées au paragraphe précédent. Les résultats suivants sont donc une conséquence directe des résultats 3.2 et 3.3. Il nous faut comme auparavant distinguer deux cas selon que l'indice de modulation  $h$  est multiple de  $\frac{1}{2}$  ou non.

#### ■ Le cas où $h$ n'est pas multiple de $\frac{1}{2}$

**Proposition 3.2 :** *Supposons que  $T_e/T_s$  est irrationnel et que  $h$  n'est pas un multiple de  $\frac{1}{2}$ . Le critère du module constant  $\mathcal{J}_{T_e}(G)$  est nul si et seulement si  $f(t)$  est une fonction continue telle que pour tout  $\tau \in [0, T_s[$ , la suite  $(f(\tau + nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  correspond aux coefficients d'un filtre numérique de type I ou de type II, à un retard et à un déphasage près.*

Dans le cas où  $T_e/T_s$  est rationnel ( $T_e/T_s = p/q$ , où  $p$  et  $q$  sont deux entiers premiers entre eux), les résultats sont tout à fait similaires. En effet, le résultat 3.2 reste inchangé à l'exception près que la condition sur la suite  $(f(\tau + nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  doit être vérifiée non plus pour tout  $\tau \in [0, T_s[$ , mais pour tout  $\tau \in \{0, \frac{T_s}{q}, \dots, (q-1)\frac{T_s}{q}\}$ .

Avant de traiter le cas où l'indice de modulation est égal à  $\frac{1}{2}$ , nous commentons le résultat précédent.

#### Discussion

Nous supposons pour simplifier que  $T_e/T_s$  est irrationnel. Nous attendons de l'étape d'égalisation qu'elle restitue un signal que l'on pu aurait observer en l'absence de trajets multiples. Comme nous l'avons expliqué précédemment, ceci revient à dire que pour tout  $t$ ,

$$z_a(t) = s_a(t - \delta)e^{i\varphi} \quad (3.47)$$

où  $\varphi$  et  $\delta$  sont deux réels qui représentent respectivement un retard et un déphasage. Une solution  $f(t)$  est donc satisfaisante dès lors que (3.47) est vérifiée, c'est à dire dès lors que  $f(t)$  est la réponse impulsionnelle d'un filtre interpolateur (à un déphasage  $\varphi$  près). En utilisant les expressions (3.22) et (3.24), on s'aperçoit que (3.47) revient à :

$$f(t) = c(t - \delta) e^{i\varphi} \quad (3.48)$$

pour tout  $t$ , où  $c(t)$  est la fonction de mise en forme de Laurent. En particulier, ceci implique que toute fonction  $f(t)$  dont le support temporel n'est pas un intervalle de longueur  $2T_s$  ne peut en aucun cas être un interpolateur. Remarquons au passage que la fonction  $f(t)$  définie par (3.48) est telle que pour tout  $\tau \in [0, T_s[$ , la suite  $(f(\tau + nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  correspond aux coefficients d'un filtre numérique de type I. Dans la suite nous donnons des exemples de familles de solutions, et nous observons en particulier que des solutions indésirables existent.

- *Le cas où la solution  $f(t)$  est telle que pour tout  $\tau \in [0, T_s[$ , la suite  $(f(\tau + nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  correspond aux coefficients d'un filtre numérique de type I.*

Dans ce cas, pour tout  $\tau \in [0, T_s[$ , le signal  $(z_a(\tau + nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  peut être vu comme la sortie d'un filtre numérique de type I excité par la suite de pseudo-symboles  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , à un déphasage  $\varphi_\tau$  et un retard  $K_\tau$  près. Pour simplifier ce qui suit, nous supposons que le retard  $K_\tau$  est nul. En utilisant les résultats du paragraphe 3.4 et plus particulièrement l'expression (3.35), on peut écrire  $z_a(\tau + nT_s)$  sous la forme suivante pour tout entier  $n$  :

$$z_a(\tau + nT_s) = e^{i\varphi_\tau} \exp \left( i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-1} a_j + i\theta_\tau a_n \right), \quad (3.49)$$

où  $\theta_\tau$  représente un paramètre de l'intervalle  $[0, \pi[$ . Rappelons par ailleurs que le signal émis  $s_a(t)$  vérifie la relation suivante :

$$s_a(\tau + nT_s) = \exp \left( i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-1} a_j + i\pi h \phi_a(\tau) a_n \right), \quad (3.50)$$

où  $\phi_a(t)$  représente l'intégrale de la fonction de mise en forme utilisée au niveau de l'émetteur. L'égalité ci-dessus peut naturellement être rapprochée de l'équation (3.49). Si pour tout  $\tau \in [0, T_s[$ ,  $\theta_\tau$  coïncide avec  $\pi h \phi_a(\tau)$  et si le déphasage  $\varphi_\tau$  est constant par rapport à  $\tau$ , alors l'équation (3.47) est bien vérifiée :  $z_a(t)$  correspond au signal émis  $s_a(t)$  à un retard et un déphasage près. Malheureusement, ces hypothèses ne sont pas nécessairement réalisées, et des solutions indésirables existent donc.

- *Le cas où il existe  $\tau \in [0, T_s[$ , tel que la suite  $(f(\tau + nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  correspond aux coefficients d'un filtre numérique de type II.*

Alors, la suite  $(f(\tau + nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  comporte trois coefficients non nuls. Le support de  $f(t)$  excède nécessairement la longueur  $2T_s$ . Finalement, le signal  $z_a(t)$  ne peut en aucun cas vérifier (3.47).

### Exemple :

Afin d'illustrer notre propos, nous construisons maintenant un exemple de solution indésirable. Posons par exemple  $h = 0.7$  et appelons  $t \rightarrow \theta(t)$  la fonction linéaire par morceaux définie sur l'intervalle  $[0, T_s]$  et dont les variations sont représentées par le tableau suivant :

Nous construisons maintenant une solution possible  $f(t)$  à partir de  $\theta(t)$ . La fonction

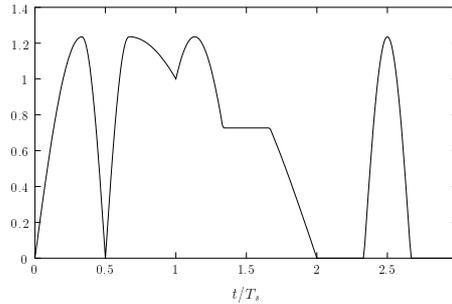
$t$	0	$\frac{T_s}{3}$	$\frac{T_s}{2}$	$\frac{2T_s}{3}$	$T_s$
$\theta(t)$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi h$

TAB. 3.1 – Variations de la fonction  $\theta(t)$  sur  $[0, T_s[$ .

$f(t)$  est définie ainsi :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin \theta(t)}{\sin \pi h} & \text{si } t \in [0, T_s], \\ \frac{\sin(\pi h - \theta(t - T_s))}{\sin \pi h} & \text{si } t \in [T_s, T_s + \frac{T_s}{3}] \cup [T_s + \frac{2T_s}{3}, 2T_s], \\ \frac{e^{-i\theta(t-T_s)}}{i \tan \pi h} & \text{si } t \in [T_s + \frac{T_s}{3}, T_s + \frac{2T_s}{3}], \\ \frac{i \cos \theta(t - 2T_s)}{\sin \pi h} & \text{si } t \in [2T_s + \frac{T_s}{3}, 2T_s + \frac{2T_s}{3}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction  $f(t)$  est construite de telle manière que pour tout  $\tau \in [0, T_s[$ , la suite  $(f(\tau + nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  corresponde tantôt à un filtre de type I, tantôt à un filtre de type II. La figure 3.2 représente le module  $|f(t)|$  de la fonction  $f(t)$ . Il apparaît clairement que le support

FIG. 3.2 – Module de la solution  $f(t)$ 

de la fonction  $f(t)$  est de longueur supérieure à  $2T_s$  et que, par conséquent, le signal  $z_a(t)$  produit par le filtre de réponse impulsionnelle  $f(t)$  et excité par la suite pseudo-symboles n'est pas un signal CPM.

■ **Le cas  $h = \frac{1}{2}$**

Lorsque l'indice de modulation est égal à  $\frac{1}{2}$ , le résultat est le suivant.

**Proposition 3.3 :** *Supposons que  $h = \frac{1}{2}$  et que  $T_e/T_s$  est irrationnel (respectivement rationnel :  $T_e/T_s = p/q$ , où  $p$  et  $q$  sont deux entiers premiers entre eux). Le critère du*

module constant  $\mathcal{J}_{T_e}(G)$  est nul si et seulement si pour tout  $\tau \in [0, T_s[$  (resp. pour tout  $\tau \in \{0, \frac{T_s}{q}, \dots, (q-1)\frac{T_s}{q}\}$ ), la suite  $(f(\tau + nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  correspond aux coefficients d'un filtre numérique vérifiant le résultat 3.3.

Autrement dit, la fonction  $f(t)$  est telle que pour tout  $\tau \in [0, T_s[$  (resp. pour tout  $\tau \in \{0, \frac{T_s}{q}, \dots, (q-1)\frac{T_s}{q}\}$ ),

$$\begin{cases} f(\tau) & = i^{(-P_\tau+1)} \sin \theta_\tau e^{i\varphi_\tau} \\ f(\tau + P_\tau T_s) & = \cos \theta_\tau e^{i\varphi_\tau} \end{cases} \quad (3.51)$$

et  $\tilde{f}(\tau + kT_s) = 0$  pour tout  $k$  différent de 0 et  $P_\tau$ .  $P_\tau$  est ici un entier strictement positif et  $\theta_\tau$  est un paramètre de l'intervalle  $[0, \pi[$ . Notons qu'en réalité, la relation (3.51) est vraie à un retard  $K_\tau$  près. Nous avons supposé que  $K_\tau = 0$  pour simplifier les expressions.

Comme précédemment, les solutions  $f(t)$  qui peuvent être jugées satisfaisantes sont celles qui correspondent à des interpolateurs (à un déphasage près), c'est à dire celles qui donnent lieu à un signal de sortie  $z_a(t)$  qui vérifie (3.47). Les remarques effectuées dans le cas où  $T_e = T_s$  peuvent être directement réutilisées. Grâce à l'équation (3.45), on constate que pour tout  $\tau \in [0, T_s[$  et pour tout  $n$ ,

$$z_a(\tau + nT_s) = e^{i\varphi_\tau} \exp \left( i \frac{\pi}{2} \sum_{j=-\infty}^{n-P_\tau} a_j + i\theta_\tau \prod_{j=0}^{P_\tau-1} a_{n-j} \right).$$

Donc, en suivant la discussion présentée dans le cas où  $T_e = T_s$ ,  $z_a(t)$  n'est susceptible d'être un signal CPM qu'à condition que  $P_\tau$  soit égal à 1 pour tout  $\tau$ . Dans ce cas, on peut écrire le signal  $z_a(t)$  de la manière suivante : pour tout  $\tau \in [0, T_s[$  et pour tout  $n$ ,

$$z_a(\tau + nT_s) = e^{i\varphi_\tau} \exp \left( i \frac{\pi}{2} \sum_{j=-\infty}^{n-1} a_j + i\theta_\tau a_n \right).$$

En comparant comme précédemment l'équation ci-dessus à (3.50), on observe que, si pour tout  $\tau \in [0, T_s[$ ,  $\theta_\tau$  coïncide avec  $\pi h \phi_a(\tau)$  (à un retard près) et si le déphasage  $\varphi_\tau$  est constant par rapport à  $\tau$ , alors  $z_a(t)$  correspond bien au signal émis  $s_a(t)$  à un retard et un déphasage près. Bien entendu, ces hypothèses ne sont pas nécessairement réalisées, et, là encore, des solutions indésirables existent.

### 3.5 Cas des CPM à réponse partielle ( $L > 1$ )

En suivant le même cheminement que dans le cas de CPM à réponse complète, nous étudions maintenant les solutions du critère du module constant dans le cas de CPM à réponse partielle.

#### 3.5.1 Représentation de Laurent et formulation du problème

Lorsque  $L > 1$ , nous avons vu au paragraphe 2.1.3 que la représentation de Laurent permet d'écrire le signal  $s_a(t)$  émis comme une somme de  $2^{L-1}$  modulations linéaires.

Donnons nous quelques lignes pour rappeler ce résultat. Soit  $\mathcal{P}_L$  l'ensemble des  $2^{L-1}$  sous-ensembles de  $\{1, \dots, L-1\}$  (c.f. paragraphe 2.1.3). Pour tout  $t$ ,  $s_a(t)$  peut être mis sous la forme :

$$s_a(t) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_\nu(n) c_\nu(t - nT_s) \right), \quad (3.52)$$

où l'on rappelle que pour tout ensemble  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , les pseudo-symboles  $(x_\nu(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  sont définis par :

$$\forall n, \quad x_\nu(n) = \exp \left[ i\pi h \left( \sum_{k=-\infty}^{n-L} a_k + \sum_{k \in \nu} a_{n-k} + a_n \right) \right]. \quad (3.53)$$

Pour tout  $\nu$ ,  $(x_\nu(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite temporellement corrélée. De plus, les différentes suites de pseudo-symboles sont mutuellement corrélées. Les fonctions  $(c_\nu(t))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  sont les fonctions de mise en forme de Laurent données par l'équation (2.14). Nous insistons à nouveau sur le fait que le support temporel de chaque fonction  $c_\nu(t)$  est inclus dans l'intervalle  $[0, (L+1)T_s]$ .

En suivant la même démarche que dans le cas de CPM à réponse complète, nous utilisons la représentation de Laurent afin d'obtenir une formulation plus commode de la condition de module constant.

### ■ Problème équivalent

Comme auparavant, on désigne par  $h_a(t)$  la réponse impulsionnelle du canal. En utilisant les mêmes arguments qu'au paragraphe précédent, on peut étendre l'expression (3.23) au cas de signaux CPM à réponse partielle. Le signal reçu  $y_a(t)$  s'écrit en effet :

$$y_a(t) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_\nu(k) \int_{\mathbb{R}} h_a(u) c_\nu(t - kT_s - u) du. \quad (3.54)$$

Toujours en suivant la même trame de raisonnement que dans le cas de CPM à réponse complète, nous considérons pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , le filtre de réponse fréquentielle

$$F_\nu(f) = G(f)H(f)C_\nu(f),$$

où, pour tout  $\nu$  appartenant à  $\mathcal{P}_L$ ,  $C_\nu(f)$  représente la transformée de Fourier de  $c_\nu(t)$ . Le filtre de réponse fréquentielle  $F_\nu(f)$  permet donc de modéliser les effets successifs de la mise en forme  $c_\nu(t)$ , du canal et de l'égaliseur. On désigne par  $f_\nu(t)$  sa réponse impulsionnelle. On obtient :

$$z_a(t) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_\nu(k) f_\nu(t - kT_s). \quad (3.55)$$

Le signal de sortie d'égaliseur peut donc s'écrire comme une somme de modulations linéaires de suites de pseudo-symboles.

Il nous suffit donc de caractériser la famille de fonctions  $(f_\nu(t))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$ . Restreignons nous pour simplifier au cas où  $T_e/T_s$  est irrationnel. Supposons que la condition de module constant est vérifiée, i.e.  $\mathcal{J}_{T_e}(G) = 0$ . La proposition 3.1 permet alors d'écrire que pour tout  $\tau \in [0, T_s[$ , la suite  $(z_a(\tau + nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  est de module constant.

Soit  $\tau$  un réel quelconque de l'intervalle  $[0, T_s[$ . L'expression (3.55) permet d'exprimer la série temporelle  $(z_a(\tau + nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  de la manière suivante :

$$z_a(\tau + nT_s) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} [f_{\nu, \tau}(z)] x_{\nu}(n) \quad (3.56)$$

où la famille de filtres  $(f_{\nu, \tau}(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  est définie pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$  par :

$$f_{\nu, \tau}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{\nu}(\tau + kT_s) z^{-k}.$$

Et comme les échantillons  $(z_a(\tau + nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  sont de module constant, nous pouvons écrire finalement que *pour tout*  $\tau \in [0, T_s[$ ,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left| \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} [f_{\nu, \tau}(z)] x_{\nu}(n) \right| = 1, \quad \text{p.s.} \quad (3.57)$$

En suivant le raisonnement du paragraphe précédent, nous fixons maintenant  $\tau \in [0, T_s[$ . Nous cherchons à caractériser les familles de filtres  $(f_{\nu, \tau}(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  qui vérifient la condition précédente. Là encore, nous constatons que ceci revient à caractériser les solutions de la condition de module constant dans le cas où la période d'échantillonnage coïncide avec la période symbole.

### 3.5.2 Cas d'un échantillonnage à la période symbole

Nous supposons ici que  $T_e = T_s$ . Dans ce cas, nous constatons grâce à (3.55) que les échantillons  $(z(n) = z_a(nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  du signal égalisé  $z_a(t)$  à la période  $T_s$  s'expriment de la manière suivante :

$$z(n) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} [f_{\nu}(z)] x_{\nu}(n), \quad (3.58)$$

où pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ ,  $f_{\nu}(z)$  est la fonction de transfert définie par :

$$f_{\nu}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{\nu}(kT_s) z^{-k}.$$

La caractérisation des solutions du critère du module constant passe donc par la mise en évidence des familles de filtres  $(f_{\nu}(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  qui sont telles que la série temporelle donnée par (3.58) est de module constant égal à 1, soit

$$\forall n, \quad \left| \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} [f_{\nu}(z)] x_{\nu}(n) \right| = 1 \quad \text{p.s.} \quad (3.59)$$

#### ■ Liens éventuels entre les filtres $(f_{\nu}(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$

Quels que soient le canal de transmission et l'égaliseur  $G(f)$  considérés, il existe une famille  $(f_{\nu}(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  de filtres numériques telle que le signal  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  obtenu en sortie d'égaliseur peut se mettre sous la forme (3.58). Bien entendu, la famille  $(f_{\nu}(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  dépend du canal  $h_a(t)$ , de l'égaliseur et des fonctions de mise en forme de Laurent  $(c_{\nu}(t))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$ . Cela ne suppose-t-il pas que des liens existent entre les différents filtres  $f_{\nu}(z)$  ? Afin de répondre

à cette question, nous considérons le filtre analogique formé par la mise en cascade du canal et de l'égaliseur, c'est à dire le filtre de réponse fréquentielle

$$\tilde{H}(f) = H(f)G(f),$$

et nous désignons par  $\tilde{h}_a(t)$  la réponse impulsionnelle de ce filtre. Pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , on peut écrire le filtre  $f_\nu(z)$  de la manière suivante :

$$f_\nu(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_{\mathbb{R}} \tilde{h}_a(u) c_\nu(kT_s - u) du \right) z^{-k}. \quad (3.60)$$

Rappelons nous en outre que la famille de fonctions  $(c_\nu(t))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  ne dépend que de  $\phi_a(t)$ , la primitive du filtre de mise en forme mis en œuvre par l'émetteur, et caractéristique de la classe de modulation CPM utilisée. Par conséquent, les  $2^{L-1}$  filtres  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  sont univoquement déterminés par la donnée de seulement deux fonctions :  $\tilde{h}_a(t)$  et  $\phi_a(t)$ . Pour une fonction  $\phi_a(t)$  et un canal de transmission donnés, il se pourrait donc que des liens entre les différents filtres  $f_\nu(z)$  existent et que, quel que soit l'égaliseur  $G(f)$  mis en œuvre, les coefficients de ces filtres doivent vérifier certaines contraintes *a priori*.

**Notation :** Dans la suite, nous désignons par  $\mathcal{F}_L$  l'ensemble des familles  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  telles que pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ ,  $f_\nu(z)$  correspond à un filtre numérique dont les coefficients sont de module au carré sommable.

Supposons une fois pour toutes la mise en forme  $\phi_a(t)$  et le canal de transmission  $h_a(t)$  fixés. La question se pose de savoir à quel ensemble appartient la famille de filtres  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  étant donnés  $\phi_a(t)$  et  $h_a(t)$ . Autrement dit, nous devons nous demander quelles sont les familles de filtres  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  définies par (3.60) et qui peuvent être atteintes en faisant varier uniquement l'égaliseur  $G(f)$ .

**Notation :** Étant donnés la fonction de mise en forme  $\phi_a(t)$  et la réponse impulsionnelle  $h_a(t)$  du canal de transmission, nous désignons par  $\mathcal{G}_L$  le sous ensemble de  $\mathcal{F}_L$  tel que pour tout  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L} \in \mathcal{G}_L$ , il existe un égaliseur  $G(f)$  tel que la relation (3.60) soit vérifiée. Il est facile de voir qu'en réalité  $\mathcal{G}_L$  ne dépend pas du canal considéré (pour peu que la réponse fréquentielle de celui-ci ne s'annule pas). Ceci est dû au fait que l'ensemble décrit par  $H(f)G(f)$  lorsque  $G(f)$  varie est identique à l'ensemble décrit par  $G(f)$  lui-même :  $\mathcal{G}_L$  est donc identique lorsque la réponse fréquentielle du canal vaut  $H(f)$  et lorsqu'elle vaut 1. Ce point est toutefois éclairci en annexe.

Il est bien évident que le solutions de la condition de module constant (3.59) doivent être recherchés en imposant la contrainte *a priori* :

$$(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L} \in \mathcal{G}_L.$$

## ■ Objectif

Afin de mettre en évidence les minima du critère du module constant, il nous faut caractériser l'ensemble des familles  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  appartenant à  $\mathcal{G}_L$  telles que la propriété de module constant (3.59), que nous rappelons ici, soit vérifiée :

$$\forall n, \left| \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} [f_\nu(z)] x_\nu(n) \right| = 1 \text{ p.s.} \quad (3.61)$$

La tâche consiste donc à établir une condition nécessaire et suffisante portant sur les filtres  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  telle que la propriété (3.59) soit vérifiée. Comme précédemment, nous qualifions de solution souhaitable tout cas de figure dans lequel les échantillons  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  observés après échantillonnage du signal de sortie de l'égaliseur peuvent être vus comme le signal CPM que l'on aurait reçu en l'absence de trajets multiples, c'est à dire toute solution  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  pouvant s'écrire sous la forme :

$$z(n) = e^{i\varphi} s_a(nT_s - \delta),$$

où  $\varphi$  est un déphasage et où  $\delta$  est un retard.

### ■ Limite des résultats et approche retenue :

Nous n'avons malheureusement pas été en mesure de formuler une condition suffisante et explicite conduisant à une caractérisation claire et univoque des solutions. Toutefois, les résultats obtenus et présentés ci-après permettent assez bien selon nous de cerner l'ensemble des solutions de la propriété de module constant. Nous nous limitons dans la suite au cas où l'indice de modulation n'est pas un multiple de  $\frac{1}{2}$ .

Dans un premier temps, nous énonçons une condition nécessaire à la propriété de module constant : nous montrons que pour toute famille de filtres  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  vérifiant (3.59), chaque filtre  $f_\nu(z)$  ne possède qu'un petit nombre de coefficients non nuls.

La condition nécessaire précédente représente une contrainte forte sur l'ensemble des familles  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  solutions. Malgré cela, le fait que nous ne disposions pas de caractérisation complète des solutions nous impose de mentionner des exemples de solutions. Nous commençons par donner des exemples de signaux  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  de module 1 pour lesquels on peut mettre en évidence une famille  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L} \in \mathcal{F}_L$  telle que :

$$z(n) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} [f_\nu(z)] x_\nu(n),$$

sans pour autant que nous sachions démontrer que  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  appartient à  $\mathcal{G}_L$ , c'est à dire sans que nous soyons sûrs qu'il existe en pratique un égaliseur permettant d'atteindre une telle solution. À défaut de pouvoir montrer cette propriété quelle que soit la fonction  $\phi_a(t)$  caractéristique de la modulation, nous nous contentons de vérifier que ceci est vrai dans des cas usuels de modulation CPM.

### ■ Résultats dans le cas $h \neq \frac{1}{2}$

Le résultat suivant est établi en annexe. On rappelle que pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ ,  $\bar{\nu}^L$  désigne le complémentaire  $\bar{\nu}^L$  de  $\nu$  dans  $\{1, 2, \dots, L-1\}$ . On rappelle également que pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$  différent de  $\{1, 2, \dots, L-1\}$ ,  $\max(\bar{\nu}^L)$  représente le plus grand élément de  $\bar{\nu}^L$ .

**Résultat 3.4 :** *Supposons que  $h$  ne soit pas un multiple de  $\frac{1}{2}$ . Soit  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  une famille de filtres numériques appartenant à  $\mathcal{F}_L$  et qui vérifie la condition (3.59). Pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , on note :*

$$f_\nu(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{\nu,k} z^{-k}.$$

*Alors, il existe un entier  $K$  tel que :*

- $f_{\{1\dots L-1\},k} = 0$  pour tout  $k \neq K, \dots, K + 2L$  ;
- si  $\nu \in \mathcal{P}_L$  est différent de  $\{1, \dots, L-1\}$  :

$$f_{\nu,k} = 0 \text{ pour tout } k \neq K, \dots, K + 2L - \max(\bar{\nu}^L) - 1.$$

Nous soulignons le fait que l'entier  $K$  ne dépend pas du sous-ensemble  $\nu$ .

**Exemple :** Afin d'illustrer le résultat ci-dessus, considérons l'exemple suivant. Supposons que la longueur  $L$  du filtre de mise en forme est égale à 3. Soit  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_3}$  une famille de filtres numériques telle que le signal

$$z(n) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_3} [f_\nu(z)] x_\nu(n)$$

est de module constant. Alors ces filtres peuvent s'écrire (à un retard  $K$  près supposé nul ici) sous la forme :

- $f_{\{1,2\}}(z) = \sum_{k=0}^6 f_{\{1,2\},k} z^{-k}$
- $f_{\{2\}}(z) = \sum_{k=0}^4 f_{\{2\},k} z^{-k}$
- $f_{\{1\}}(z) = \sum_{k=0}^3 f_{\{1\},k} z^{-k}$ ,  $f_{\emptyset}(z) = \sum_{k=0}^3 f_{\emptyset,k} z^{-k}$ .

Les résultats obtenus ne permettent malheureusement pas de caractériser les coefficients non nuls des filtres solutions.

Il est toutefois intéressant de se demander quelles sont les conséquences du résultat 3.4 sur l'expression du signal de sortie d'égaliseur  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . En partant du principe que le signal de sortie est de module constant et en utilisant le résultat 3.4, on peut montrer le corollaire suivant. La démonstration figure en annexe.

**Corollaire 3.1 :** *Supposons que  $h$  ne soit pas un multiple de  $\frac{1}{2}$  et que le signal  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  obtenu en sortie d'égaliseur soit de module constant égal à 1. Alors il existe un entier  $K$  tel que*

$$z(n) = \tilde{z}(n - K),$$

où le signal  $(\tilde{z}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  peut s'écrire pour tout  $n$  sous la forme :

$$\tilde{z}(n) = \exp \left[ i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-2L} a_j + i\theta(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-2L+1}) \right], \quad (3.62)$$

où  $\theta(a_n, \dots, a_{n-2L+1})$  est une fonction à valeurs réelles des symboles  $a_n, \dots, a_{n-2L+1}$ .

Bien entendu, la fonction  $\theta(a_n, \dots, a_{n-2L+1})$  doit en outre vérifier un certain nombre de contraintes afin que le signal (3.62) corresponde effectivement à la sortie de l'égaliseur définie par le modèle (3.58). Finalement, les solutions de la propriété de module constant peuvent être implicitement caractérisées par l'ensemble des signaux  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifiant à la fois les deux conditions suivantes :

1. il existe une famille  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L} \in \mathcal{G}_L$  de filtres tels que pour tout  $n$ ,

$$z(n) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} [f_\nu(z)] x_\nu(n); \quad (3.63)$$

2. il existe une fonction  $\theta(a_n, \dots, a_{n-2L+1})$  telle que pour tout  $n$  :

$$z(n) = \exp \left[ i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-2L} a_j + i\theta(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-2L+1}) \right], \quad (3.64)$$

à un retard  $K$  près.

La réunion des deux conditions ci-dessus définit une condition nécessaire et suffisante à la propriété de module constant (3.59).

Comme nous l'avons évoqué plus haut, la première de ces deux conditions implique une contrainte sur la fonction  $\theta(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-2L+1})$ . A défaut d'avoir été en mesure d'expliquer cette contrainte, il nous faudra donner dans la suite des exemples de solutions, c'est à dire des exemples de signaux  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifiant à la fois chacune des deux conditions ci-dessus.

Mais auparavant, nous tâchons d'expliquer davantage l'expression (3.64). Nous remarquons en effet que la fonction  $\theta(a_n, \dots, a_{n-2L+1})$  prend au plus  $2^{2L}$  valeurs selon les valeurs des symboles  $a_n, \dots, a_{n-2L+1}$  dans  $\{-1, +1\}$ . Par conséquent, il est possible d'exprimer analytiquement  $\theta(a_n, \dots, a_{n-2L+1})$  en fonction de  $a_n, \dots, a_{n-2L+1}$  et de  $2^{2L}$  paramètres.

### ■ Paramétrage du signal en sortie d'égaliseur

Pour tout entier  $L'$  supérieur ou égal à 1, on désigne par  $\Omega_{L'}$  l'ensemble des parties  $\omega$  de  $\{0, 1, \dots, L' - 1\}$ .

Le lemme suivant est démontré en annexe.

**Lemme 3.1 :** *Soit  $L'$  un entier supérieur ou égal à 1. Soit  $\theta(a_n, \dots, a_{n-L'+1})$  une fonction réelle quelconque des symboles binaires  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-L'+1}$ . Il existe une unique famille  $(\theta_\omega)_{\omega \in \Omega_{L'}}$  de  $2^{L'}$  paramètres réels, telle que pour tout  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-L'+1}$ ,*

$$\theta(a_n, \dots, a_{n-L'+1}) = \sum_{\omega \in \Omega_{L'}} \left( \theta_\omega \prod_{j \in \omega} a_{n-j} \right). \quad (3.65)$$

Ce lemme provient de l'observation que l'espace vectoriel des fonctions à  $L'$  variables binaires est isomorphe à  $\mathbb{C}^{2^{L'}}$ . L'ensemble des fonctions  $\left( \prod_{j \in \omega} a_{n-j} \right)_{\omega \in \Omega_{L'}}$  forme une base de cet espace.

Autrement dit, toute fonction  $\theta(a_n, \dots, a_{n-L'+1})$  peut être exprimée comme une somme de monômes de la forme  $a_{n-j_1} a_{n-j_2} \dots a_{n-j_P}$ , où  $\omega = (j_1, j_2, \dots, j_P)$  est un sous-ensemble  $\{0, 1, \dots, L' - 1\}$ .

L'utilisation du lemme 3.1 au rang  $L' = 2L$  permet d'obtenir une forme paramétrée équivalente de tout signal  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  défini par (3.64). Dans la suite, nous supposons pour simplifier que le retard  $K$  est égal à zéro. Pour tout  $n$ , l'expression (3.64) est équivalente à :

$$z(n) = \exp \left[ i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-2L} a_j + i \sum_{\omega \in \Omega_{2L}} \left( \theta_\omega \prod_{j \in \omega} a_{n-j} \right) \right]. \quad (3.66)$$

### ■ Familles de solutions

Jusqu'ici, nous avons pu mettre en évidence des conditions nécessaires portant sur l'expression du signal  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  de sortie d'égaliseur pour que la propriété de module constant soit vérifiée. Afin de compléter autant que possible ce résultat, nous présentons maintenant des exemples de familles de signaux  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  qui vérifient chacune des deux conditions (3.63) et (3.64) et qui, par conséquent, correspondent à des solutions du critère du module constant.

Afin de pouvoir vérifier que les signaux présentés ci-après sont effectivement des solutions, nous devons utiliser la proposition suivante.

**Proposition 3.4 :** *Soit  $(f_\nu(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{\nu,k} z^{-k})_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  une famille de filtres numériques appartenant à  $\mathcal{F}_L$  telle que*

- $f_{\{1 \dots L-1\},k} = 0$  pour tout  $k \neq 0, \dots, 2L$  ;
- si  $\nu \in \mathcal{P}_L$  est différent de  $\{1, \dots, L-1\}$  :

$$f_{\nu,k} = 0 \text{ pour tout } k \neq 0, \dots, 2L - \max(\bar{\nu}^L) - 1.$$

Alors, pour les classes de modulations CPM testées,  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  appartient à  $\mathcal{G}_L$ .

Cette proposition semble délicate à démontrer dans le cas général. Nous nous sommes donc contentés de montrer grâce à des moyens informatiques (voir Annexe B.6) qu'elle est vraie dans un certain nombre de cas classiques (2RC, 3RC, 4RC).

Une première famille de solutions est donnée par la proposition ci-dessous, démontrée en annexe :

**Proposition 3.5 :** *Soit  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  un signal pouvant s'écrire :*

$$z(n) = \exp \left[ i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-L} a_j + i\theta(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-L+1}) \right], \quad (3.67)$$

où  $\theta(a_n, \dots, a_{n-L+1})$  est une fonction quelconque des  $L$  symboles  $a_n, \dots, a_{n-L+1}$ . Un tel signal vérifie les deux conditions (3.63) et (3.64).

En utilisant le lemme 3.1 au rang  $L' = L$ , on constate que l'équation (3.67) revient à écrire  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  sous la forme paramétrée :

$$z(n) = \exp \left[ i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-L} a_j + i \sum_{\omega \in \mathcal{Q}_L} \left( \theta_\omega \prod_{j \in \omega} a_{n-j} \right) \right], \quad (3.68)$$

où  $\mathcal{Q}_L$  désigne l'ensemble des parties de  $\{0, 1, \dots, L-1\}$ , et où  $(\theta_\omega)_{\omega \in \mathcal{Q}_L}$  représente une famille de paramètres réels.

Parmi de tels signaux, certains correspondent à des solutions souhaitables, d'autres à des solutions indésirables.

• Par exemple, supposons que les paramètres soient tels que  $\theta_\omega = 0$  dès que l'ensemble  $\omega$  contient au moins deux éléments, soit  $\text{card}(\omega) \geq 2$ . Dans ce cas, les seuls paramètres  $\theta_\omega$  non nuls sont ceux pour lesquels  $\omega$  comprend un seul élément  $j$  de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, L-1\}$  ou pour  $\omega = \emptyset$ . On désigne respectivement par  $\theta_j$  et  $\theta_\emptyset$  ces paramètres. L'équation (3.68) peut alors être simplifiée de la manière suivante : pour tout  $n$ ,

$$z(n) = \exp \left[ i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-L} a_j + i \sum_{j=0}^{L-1} \theta_j a_{n-j} \right] e^{i\theta_\emptyset}. \quad (3.69)$$

Supposons en outre qu'il existe un réel  $\delta$  compris entre 0 et  $T_s$  tel que pour tout  $j$  appartenant à  $\{0, 1, \dots, L-1\}$ , le paramètre  $\theta_j$  vérifie  $\theta_j = \pi h \phi_a(jT_s + \delta)$  (on rappelle que  $\phi_a(t)$  représente la primitive du filtre de mise en forme utilisé à l'émission). En utilisant la définition (2.1) du signal CPM émis, on constate immédiatement que pour tout  $n$ ,

$$z(n) = s_a(nT_s + \delta) e^{i\theta_\emptyset}. \quad (3.70)$$

Le signal  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  obtenu à la sortie de l'égaliseur coïncide donc (à un déphasage près) à une version échantillonnée du signal émis. Dans un tel cas, après échantillonnage du signal en sortie de l'égaliseur, les trajets multiples apparaissent comme compensés et l'égalisation sera bien entendu jugée satisfaisante.

• Malheureusement, les suppositions formulées ci-dessus peuvent ne pas être vérifiées, si bien que l'équation (3.70) n'est pas nécessairement réalisée. Des solutions indésirables existent.

Notons pour finir que la famille de solutions définie par la proposition 3.5 ne représente pas la totalité des solutions : d'autres solutions indésirables peuvent être mises en évidence. Considérons par exemple le signal  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  défini pour tout  $n$  par :

$$z(n) = a_{n-2L+1} \exp \left[ i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-L} a_j + i\theta a_n a_{n-2L+1} \right], \quad (3.71)$$

où  $\theta$  est un paramètre quelconque appartenant à l'intervalle  $[0, \pi[$ . En utilisant la même démarche que dans le cas de CPM à réponse partielle, on peut montrer que :

$$a_{n-2L+1} \exp [i\theta a_n a_{n-2L+1}] = \frac{\sin \theta}{\sin \pi h} e^{i\pi h a_n} + \frac{e^{-i\theta}}{i \tan \pi h} + i \frac{\cos \theta}{\sin \pi h} e^{-i\pi h a_{n-2L+1}}.$$

En réinjectant l'expression ci-dessus dans (3.71), on peut finalement exprimer  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  en fonction des suites de pseudo-symboles :

$$z(n) = \frac{\sin \theta}{\sin \pi h} x_\emptyset(n) + \frac{e^{-i\theta}}{i \tan \pi h} x_{\{1 \dots L-1\}}(n-L) + i \frac{\cos \theta}{\sin \pi h} x_{\{1 \dots L-2\}}(n-L).$$

La relation ci-dessus implique que  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  peut être mis sous la forme :

$$z(n) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} [f_\nu(z)] x_\nu(n),$$

où la famille de filtres  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  est telle que seuls les coefficients  $f_{\emptyset,0}$ ,  $f_{\{1 \dots L-1\},L}$  et  $f_{\{1 \dots L-2\},L}$  sont non nuls. Cette famille vérifie donc bien les hypothèses de la proposition 3.4 : il s'agit bien d'une famille appartenant à  $\mathcal{G}_L$ . Par conséquent, la proposition (3.63) est bien vérifiée. En outre, il est facile de montrer à partir de (3.71) que le signal  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifie également la proposition (3.64). Il s'agit de toute évidence d'une solution indésirable.

### 3.5.3 Cas d'une période d'échantillonnage quelconque

Nous utilisons les résultats du paragraphe précédent afin de mettre en évidence les solutions dans le cas d'intérêt où la période d'échantillonnage est différente de  $T_s$ .

Nous caractérisons maintenant autant que les résultats du paragraphe 3.5 le permettent, la famille de fonctions  $(f_\nu(t))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$ . Plaçons nous par exemple dans le cas où  $T_e/T_s$  est irrationnel. La nullité du critère du module constant peut être exprimée par :

$$\forall \tau \in [0, T_s[, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left| \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} [f_{\nu, \tau}(z)] x_\nu(n) \right| = 1, \quad \text{p.s.} \quad (3.72)$$

où la famille de filtres  $(f_{\nu, \tau}(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  est définie pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$  par :

$$f_{\nu, \tau}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_\nu(\tau + kT_s) z^{-k}.$$

Or, pour  $\tau$  fixé, les solutions de (3.57) ont été en partie caractérisées au paragraphe précédent.

**Proposition 3.6 :** *Supposons que  $T_e/T_s$  est irrationnel et que  $h$  n'est pas un multiple de  $\frac{1}{2}$ . Le critère du module constant  $\mathcal{J}_{T_e}(G)$  est nul si et seulement si pour tout  $\tau \in [0, T_s[$ , la famille de filtres  $(f_{\nu, \tau}(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  vérifie le résultat 3.4.*

Ceci implique que pour tout  $\tau \in [0, T_s[$ , les affirmations suivantes sont vraies (à un retard  $K_\tau$  près, retard que nous supposons nul dans la suite) :

- $f_{\{1 \dots L-1\}}(\tau + kT_s) = 0$  pour tout  $k \neq 0, \dots, 2L$  ;
  - si  $\nu \in \mathcal{P}_L$  est différent de  $\{1, \dots, L-1\}$ , (3.73)
- $$f_\nu(\tau + kT_s) = 0 \text{ pour tout } k \neq 0, \dots, 2L - \max(\bar{\nu}^L) - 1.$$

Dans le cas où  $T_e/T_s$  est rationnel ( $T_e/T_s = p/q$ , où  $p$  et  $q$  sont deux entiers premiers entre eux), le résultat 3.6 reste inchangé à l'exception près que la condition (3.73) sur  $\tilde{f}(t)$  doit être vérifiée non plus pour tout  $\tau \in [0, T_s[$ , mais pour tout  $\tau \in \{0, \frac{T_s}{q}, \dots, (q-1)\frac{T_s}{q}\}$ .

La proposition 3.6 constitue une condition nécessaire devant être vérifiée par toute solution à la propriété de module constant. Des exemples de familles de solutions peuvent là encore être construits, en suivant le cheminement du paragraphe 3.5. Nous pourrions constater entre autres que, parmi ces solutions, un bon nombre ne correspondent pas à des solutions souhaitables.

## 3.6 Présence d'un résidu de fréquence porteuse

Supposons maintenant qu'un résidu de fréquence porteuse  $\delta f_0$  subsiste au niveau du signal reçu  $y_a(t)$ . Comment cette hypothèse influe-t-elle sur les solutions du critère du module constant ? Si l'égaliseur  $G(f)$  est tel que, pour une certaine période d'échantillonnage  $T_e$ , le critère du module constant  $\mathcal{J}_{T_e}(G)$  est nul, quelle est alors l'expression des échantillons  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  observés en sortie d'égaliseur en fonction des symboles émis ?

Nous montrons ici que les solutions de la condition de module constant peuvent être aisément déduites du cas où le résidu de porteuse est supposé nul. Grâce à une démarche identique à celle du paragraphe précédent, il apparaît que le signal  $y_a(t)$  reçu peut s'écrire<sup>6</sup> :

$$y_a(t) = \left( \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_\nu(k) \int_{\mathbb{R}} h_a(u) c_\nu(t - kT_s - u) du \right) e^{2i\pi\delta f_0 t}. \quad (3.74)$$

Désignons pour plus de commodité par  $\tilde{h}_\nu(t) = h_a(t) \star c_\nu(t)$ , le produit de convolution entre  $h_a(t)$  et  $c_\nu(t)$ . Écrivons maintenant l'action que produit un égaliseur analogique sur le signal  $y_a(t)$ . Pour cela nous introduisons la réponse impulsionnelle de l'égaliseur, que nous notons  $g(t)$  (et que nous prendrons garde à ne pas confondre avec le filtre de mise en forme  $g_a(t)$ ). Le signal à temps continu  $z_a(t)$  obtenu en sortie de l'égaliseur peut être mis sous la forme :

$$\begin{aligned} z_a(t) &= \int_{\mathbb{R}} g(u) \left( \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_\nu(k) \tilde{h}_\nu(t - kT_s - u) \right) e^{2i\pi\delta f_0(t-u)} du \\ &= \left( \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_\nu(k) \int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-2i\pi\delta f_0 u} \tilde{h}_\nu(t - kT_s - u) du \right) e^{2i\pi\delta f_0 t} \end{aligned}$$

Pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , nous désignons par  $\tilde{f}_\nu(t)$  le produit de convolution

$$\tilde{f}_\nu(t) = (g(t) e^{-2i\pi\delta f_0 t}) \star \tilde{h}_\nu(t).$$

En utilisant cette notation, nous pouvons écrire que  $z_a(t)$  est de module constant égal à 1 si et seulement si le signal  $z_a^c(t)$  défini par :

$$z_a^c(t) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_\nu(k) \tilde{f}_\nu(t - kT_s) \quad (3.75)$$

est lui-même de module constant égal à 1. Or le paragraphe précédent a précisément été consacré à l'étude des solutions de l'équation précédente. Donc les solutions du critère du module constant dans le cas où le résidu de porteuse  $\delta f_0$  est non nul peuvent être aisément déduites du cas où  $\delta f_0 = 0$ .

**Proposition 3.7 :** *Supposons en outre que le résidu de porteuse  $\delta f_0$  est non nul et que le signal  $z_a(t)$  observé à la sortie de l'égaliseur est de module constant. Alors pour tout réel  $t$ , on peut écrire que*

$$z_a(t) = z_a^c(t) e^{2i\pi\delta f_0 t},$$

où  $z_a^c(t)$  correspond à une solution du critère du module constant caractérisée au chapitre précédent, dans le cas où le résidu de porteuse est supposé nul.

Cette proposition signifie qu'il y a équivalence, à un facteur  $e^{2i\pi\delta f_0 t}$  près, entre les solutions du critère du module constant dans le cas où le résidu de fréquence porteuse est nul et dans le cas où il vaut  $\delta f_0$ .

<sup>6</sup>Nous nous plaçons ici dans le cas de CPM à réponse partielle. *A fortiori*, les résultats restent vrais dans le cas de CPM à réponse complète.

### 3.7 Simulations

Dans ce paragraphe, nous évaluons les performances de l'égalisation par le critère du module constant. Commençons par décrire en quelques mots la chaîne de transmission considérée. Nous supposons que la modulation CPM émise est distordue par un canal de propagation et par un éventuel bruit blanc additif. L'algorithme du module constant, le CMA, est appliqué à une version échantillonnée du signal reçu. Avant de chercher à évaluer quantitativement les performances du CMA, nous commençons par illustrer son comportement par le biais d'un exemple. Considérons un canal à trois trajets dont les réponses impulsionnelle et fréquentielle sont données par la figure 3.3. La figure 3.3b

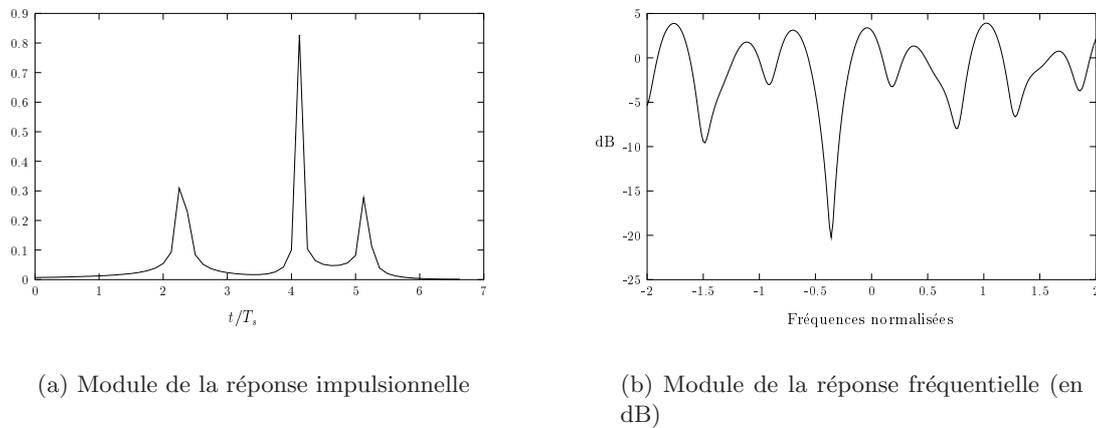


FIG. 3.3 – Exemple typique de canal de transmission considéré

montre que le canal considéré produit une atténuation importante de certaines fréquences dans l'intervalle  $[-\frac{1}{2T_s}, \frac{1}{2T_s}]$ .

Les figures 3.4.A et 3.4.B représentent les constellations<sup>7</sup> observées au niveau du signal source, du signal reçu, et du signal égalisé, pour une modulation IRC respectivement d'indice 0.7 et d'indice 0.5, et dans le cas sans bruit. Le CMA utilisé pour obtenir les figures 3.4.A et 3.4.B est appliqué au signal reçu échantillonné à la période symbole. Dans tous les cas, 500 itérations de l'algorithme du gradient sont utilisées. La constellation du signal égalisé décrit effectivement le cercle unité, ce qui signifie qu'un minimum global du critère du module constant a bien été atteint. Les figures 3.4.A et 3.4.B nous permettent d'observer que le nombre d'états de la constellation du signal égalisé peut être plus important que celui de la constellation du signal source. *Cela ne signifie pas pour autant que l'égalisation a échoué.* Par exemple, si le signal égalisé correspond à une version retardée du signal source, (i.e.  $z(n) = s_a(nT_s - \tau)$ ), alors la constellation de  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  comporte un nombre plus important d'états que la constellation de  $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  (deux fois plus d'états dans le cas de CPM à réponse complète). Enfin, la figure 3.7 montre comment la présence de bruit affecte le module du signal égalisé.

Il reste maintenant à évaluer les performances de l'égalisation par CMA. Pour cela,

<sup>7</sup>Nous appelons *constellation* la représentation dans le plan complexe des échantillons du signal au rythme symbole.

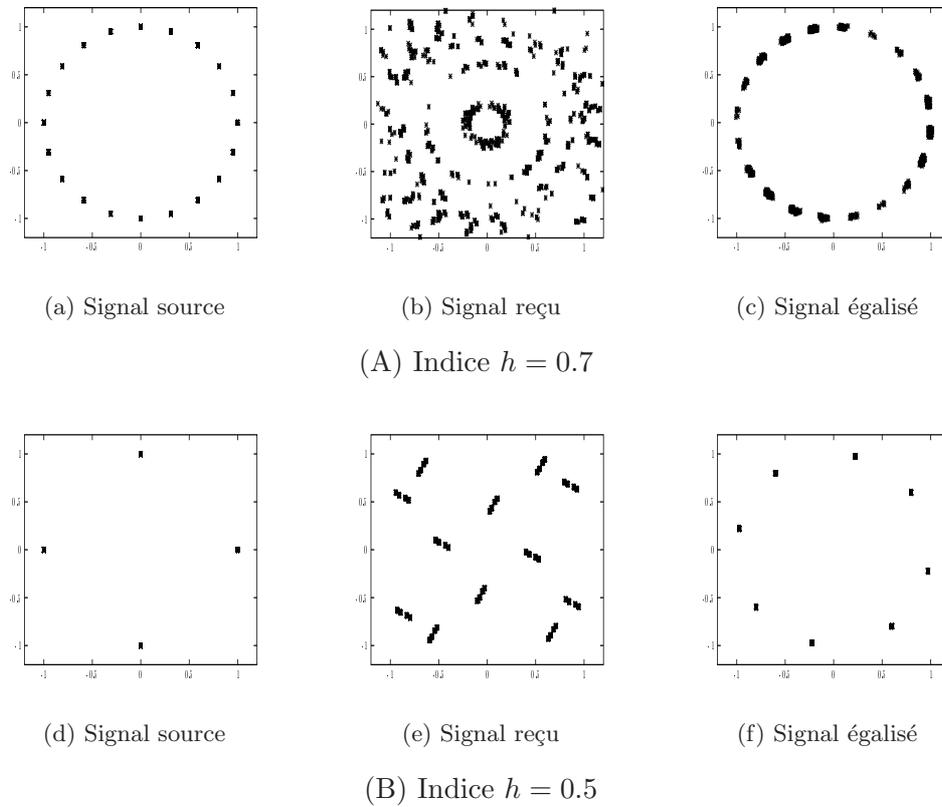


FIG. 3.4 – Constellations observées - Modulation 1RC

nous choisissons le taux d'erreur binaire ( $TEB$ ) comme indice de la qualité de l'égalisation. Après l'étape d'égalisation, nous appliquons donc un algorithme de démodulation (*c.f.* paragraphe 2.2) au signal égalisé afin d'estimer les symboles émis. Le taux d'erreur binaire est alors calculé à partir de cette estimation des symboles.

Le démodulateur utilisé pour évaluer le taux d'erreur binaire fonctionne avec l'hypothèse que le signal égalisé coïncide avec une version échantillonnée (et éventuellement bruitée) du signal initial, à un retard et un déphasage près. Bien entendu, les résultats théoriques des paragraphes précédents indiquent que certaines solutions du critère du module constant n'entrent pas dans ce cas de figure : il s'agit de solutions indésirables. On peut donc s'attendre à ce que, dans certains cas, la démodulation conduise à un taux d'erreur catastrophique. Il est donc intéressant de connaître la fréquence de ces échecs.

Ceci nécessite toutefois de prendre quelques précautions. Par exemple, certains canaux de transmission peuvent être très sélectifs en fréquence, et donc difficiles à compenser en pratique. De tels canaux peuvent bien sûr conduire à des taux d'erreur catastrophiques, sans pour autant que la méthode d'égalisation soit à incriminer. Dans l'absolu, il est donc délicat de juger si les taux d'erreur binaire aberrants doivent être attribués à des défauts de convergence du CMA ou à la sévérité de certains contextes expérimentaux. Parallèlement à l'égalisation par CMA, nous avons évalué les taux d'erreur binaire que l'on obtiendrait si le canal était connu. Ceci revient à implémenter un égaliseur de Wiener, dont le rôle est de minimiser l'erreur quadratique moyenne entre la sortie de l'égaliseur et le signal

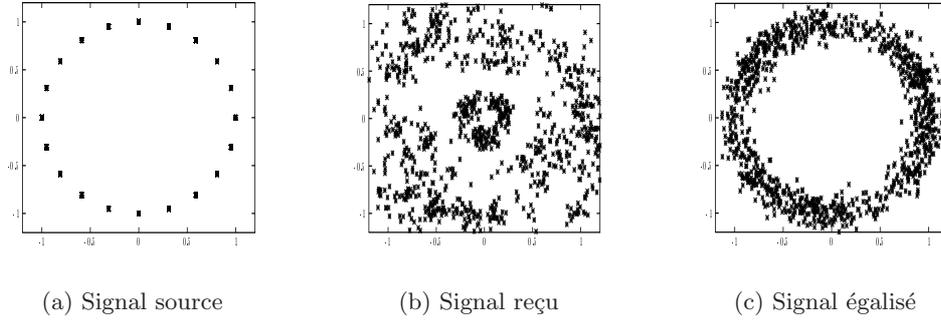


FIG. 3.5 – Constellations observées dans le cas bruité ( $E_b/N_0 = 25\text{dB}$ ) - Modulation 1RC -  $h = 0.7$

source. En pratique, il est bien évident qu'une telle approche est non envisageable dans le cas où le canal de transmission est inconnu. Néanmoins, les taux d'erreur binaire obtenus après l'égalisation de Wiener feront ici figure de borne et nous serviront de référence pour évaluer le performances du CMA.

#### Paramètres utilisés dans les simulations.

- Les signaux CPM émis sont des modulations 3RC d'indice 0.7 ou des modulations 1REC d'indice 0.5 (MSK).

- Rappelons que le bruit est supposé blanc gaussien dans la bande  $[-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}]$  et que le rapport signal sur bruit qui est pris en compte est le rapport  $E_b/N_0$  de l'énergie par bit reçue par la densité spectrale du bruit.

- Pour chaque réalisation du signal émis, un canal de Rayleigh est tiré aléatoirement : le nombre de trajets est compris entre 2 et 5 (inclus) et est tiré de manière uniforme ; les retards sont compris entre 0 et  $5T_s$  et sont eux aussi tirés uniformément ; les amplitudes complexes des trajets sont des variables aléatoires gaussiennes complexes et indépendantes entre elles.

- Le signal reçu est observé pendant une durée  $T_{obs} = 1000T_s$ .
- Pour simplifier, le résidu de fréquence porteuse est supposé nul.
- Le signal reçu est filtré passe-bas dans la bande  $[-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}]$ , puis échantillonné à la période  $T_e = \frac{T_s}{4}$ .

- Un égaliseur à  $N_{eg} = 160$  coefficients fonctionnant à la cadence  $T_e$  est appliqué aux échantillons du signal reçu. Le CMA étant un algorithme du gradient, il est nécessaire de préciser un critère d'arrêt. Nous utilisons pour cela la condition suivante : appelons  $(g_k^{(j)})_{k=1\dots N_{eg}}$  les coefficients du filtre égaliseur après la  $j^{\text{ième}}$  itération. Pour chaque itération  $j$ , nous calculons la quantité :

$$\Delta^{(j)} = \frac{1}{N_{eg}} \sum_{k=1}^{N_{eg}} \left| g_k^{(j)} - g_k^{(j-1)} \right|^2. \quad (3.76)$$

Le CMA est stoppé dès que  $\Delta^{(j)}$  devient inférieur à  $(5.10^{-4})^2$ . Nous imposons toutefois un minimum de 20 itérations et un maximum de 500 itérations.

- Pour les besoins de la synchronisation temporelle, nous interpolons le signal égalisé au rythme  $\frac{T_s}{8}$ .
- À l'issue de l'étape d'égalisation, nous procédons à la démodulation proprement dite du signal égalisé. L'algorithme de démodulation utilisé est le démodulateur cohérent. Son utilisation requiert une synchronisation en temps et en phase. Pour cela nous utilisons la méthode décrite au paragraphe 2.2.2 : pour chaque valeur du retard  $\tau \in \{0, \frac{T_s}{8}, \dots, \frac{7T_s}{8}\}$  et pour chaque valeur du déphasage  $\tilde{\theta}_0$  sur une grille, nous appliquons le démodulateur cohérent, ce qui revient à produire une estimée des symboles émis par valeur de  $(\tau, \tilde{\theta}_0)$ . Au final, nous conservons l'estimée qui est associée à la plus grande métrique fournie par l'algorithme de Viterbi. La grille de recherche en  $\tilde{\theta}_0$  comporte 10 points dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$ . En outre nous faisons fonctionner le démodulateur cohérent à la cadence  $\frac{T_s}{2}$  afin de limiter autant que possible le temps de calcul. Autrement dit, si  $(z_i(n))_n$  représente les échantillons du signal égalisé à la cadence  $\frac{T_s}{8}$ , alors pour chaque valeur de  $\tau$  et  $\tilde{\theta}_0$ , nous appliquons le démodulateur aux échantillons  $(z_i(\tau + 4n)e^{-i\tilde{\theta}_0})_n$ .
- Les taux d'erreur binaire moyens sont calculés sur la base de 1000 réalisations du signal source et du canal.

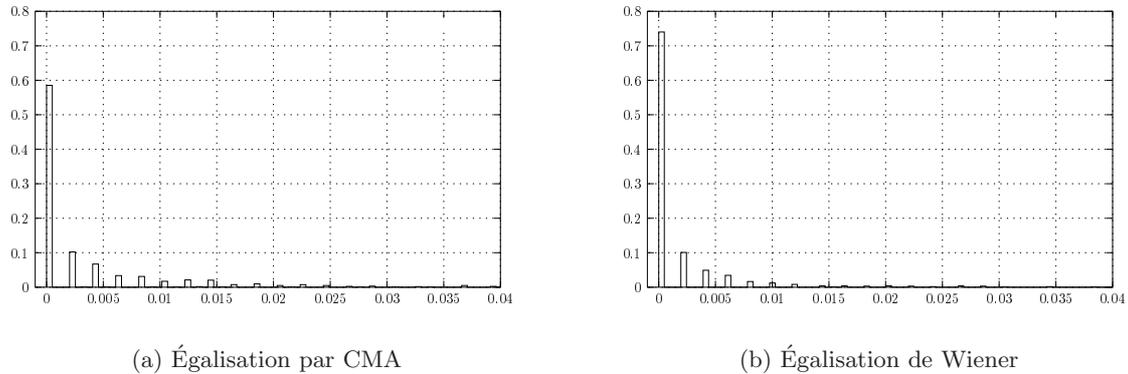
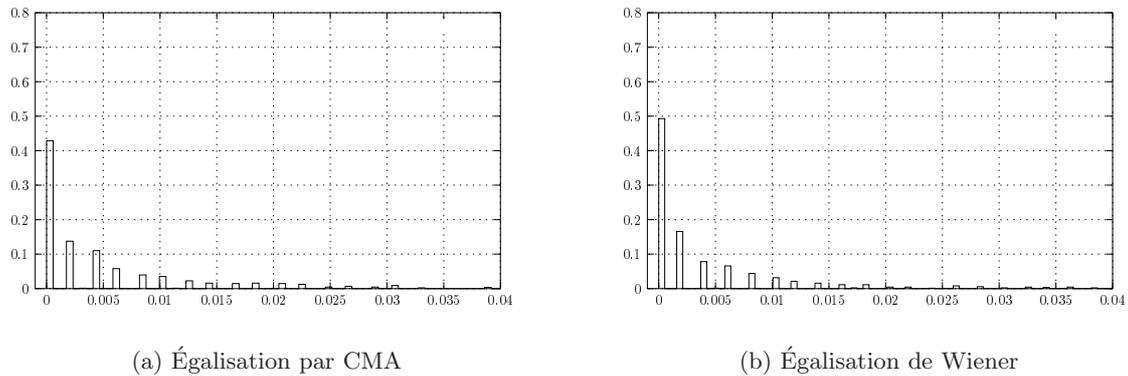
**Remarque 3.5 :** *L'observation des résultats de simulation montre que les taux d'erreur binaire obtenus après utilisation du CMA sont très satisfaisants dans la grande majorité des cas. Toutefois, certaines réalisations conduisent à des taux d'erreur aberrants, parfois proches de 0.5. Par conséquent, les taux d'erreur binaire moyens bruts (c'est à dire calculés sur l'ensemble des réalisations) sont peu significatifs. En effet, les quelques réalisations catastrophiques font immédiatement chuter les moyennes brutes (par exemple, le taux d'erreur binaire brut pour une modulation 3RC est égal à  $10^{-3}$  dans le cas non bruité). Il nous faut donc d'une part estimer le pourcentage de réalisations qui conduisent à un taux d'erreur binaire aberrant, et d'autre part évaluer les taux d'erreur binaire moyens sans tenir compte des réalisations catastrophiques.*

Les figures 3.6 et 3.7 représentent les histogrammes normalisés des taux d'erreur binaire respectivement pour des modulations 3RC d'indice 0.7 et 1REC d'indice 0.5, et pour  $E_b/N_0 = 10\text{dB}$ . Rappelons que chaque réalisation du *TEB* est calculée à partir d'une séquence de 1000 symboles, et est par conséquent un multiple de 0.001, ce qui explique le fait que la distribution des *TEB* soit discrète<sup>8</sup>. Les histogrammes des figures 3.6 et 3.7 sont alors construits de la manière suivante : la valeur prise par l'histogramme en un point donné parmi les valeurs possibles du taux d'erreur binaire est égale au nombre de réalisations ayant conduit à ce taux d'erreur particulier, divisé par le nombre total de réalisations. Il s'agit donc d'une estimation de la probabilité d'occurrence de cette valeur du *TEB*.

Les figures 3.6a et 3.6b permettent de comparer la distribution des taux d'erreur binaire lorsqu'un CMA est utilisé à celle obtenue avec un égaliseur de Wiener. Nous constatons que ces deux distributions restent comparables. La remarque est également vraie pour des modulations MSK (figures 3.7a et 3.7b).

Néanmoins, en ce qui concerne les modulations MSK, nous savons que le CMA peut conduire en pratique à des minima globaux indésirables tels que ceux caractérisés au

<sup>8</sup>D'après les figures 3.6 et 3.7, seuls les multiples pairs sont effectivement des valeurs possibles du taux d'erreur binaire. Ceci traduit le fait que le démodulateur utilisé produit en général des groupes de deux erreurs consécutives.

FIG. 3.6 – Distribution empirique des  $TEB$  -  $E_b/N_0 = 10\text{dB}$  - Modulation 3RC -  $h = 0.7$ FIG. 3.7 – Distribution empirique des  $TEB$  -  $E_b/N_0 = 10\text{dB}$  - Modulation 1REC -  $h = 0.5$ 

paragraphe 3.4 Pour de telles solutions, le signal en sortie de l'égaliseur ne correspond pas à une version retardée du signal émis, si bien que le démodulateur utilisé n'a pas *a priori* de raison de fonctionner. Pourtant, les taux d'erreur binaire observés dans ces cas de figure restent tout à fait souhaitables. Le démodulateur ne semble donc pas souffrir outre mesure de ces solutions, que l'étude théorique nous avait amené à qualifier "d'indésirables". On conclut donc que l'existence de solutions "indésirables" du critère du module constant ne paraît pas être en soi un handicap pour la démodulation.

Afin toutefois de s'assurer que les échecs de la chaîne de réception sont effectivement peu nombreux, il nous faut évaluer le nombre de taux d'erreur binaire aberrants. A titre de référence, les figures 3.8a et 3.8b nous permettent d'observer le nombre et la répartition des taux d'erreur aberrants, lorsqu'un égaliseur de Wiener est mis en œuvre, respectivement pour des modulations 3RC d'indice 0.7 et 1REC d'indice 0.5, et pour un rapport  $E_b/N_0$  égal à 10dB. Sur 1000 réalisations du canal, on note que, même en utilisant un égaliseur de Wiener, plusieurs réalisations conduisent à des taux d'erreur binaire supérieurs à 0.05. Ceci traduit le fait que le contexte de simulation que nous nous sommes fixé peut conduire à des situations difficiles. Il nous faut tenir compte de cette observation dans l'analyse des performances du CMA.

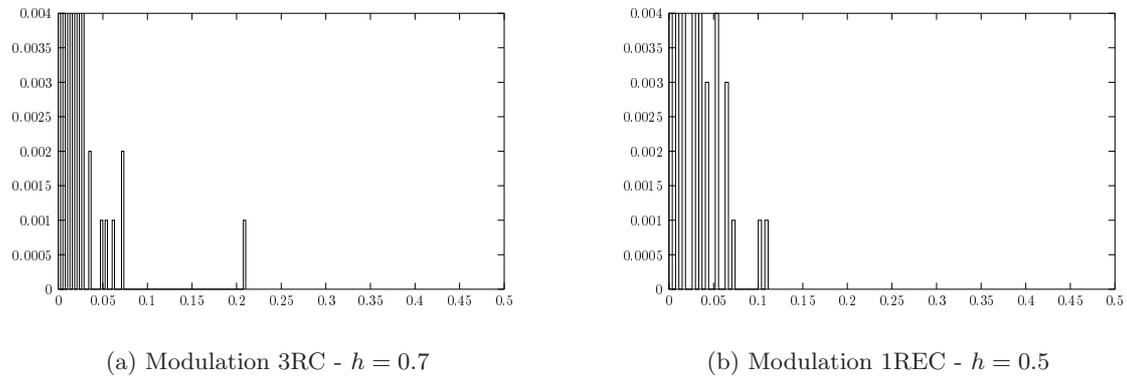


FIG. 3.8 – Répartition des taux d’erreur binaire aberrants - Égalisation de Wiener -  $E_b/N_0 = 10\text{dB}$

La figure 3.9 permet d’observer le nombre de taux d’erreur binaire aberrants dans le cas où une modulation 3RC d’indice 0.7 est émise. En l’absence de bruit (figure 3.9a), on constate que seules 5 réalisations sur 1000 ont produit un  $TEB$  supérieur à 0.05. D’autres tests ont d’ailleurs permis de constater que le nombre de réalisations catastrophiques est à peine plus significatif pour un rapport signal sur bruit de 15dB : nous en avons dénombré 10 sur 1000 réalisations. La figure 3.9b montre qu’au delà d’un certain niveau de bruit, le nombre de réalisations conduisant à un taux d’erreur catastrophique devient en revanche plus important. On dénombre dans ce cas environ 5% de réalisations produisant un  $TEB$  supérieur à 0.05. Les remarques sont similaires dans le cas d’une modulation 1REC d’indice

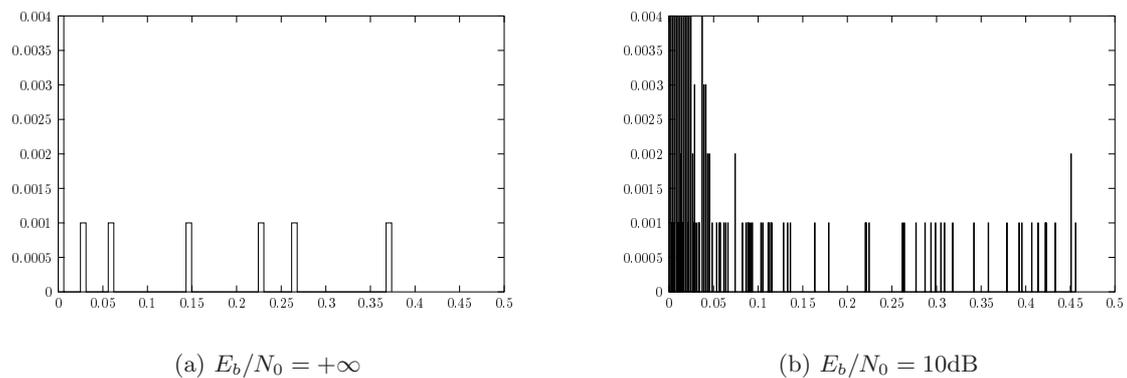


FIG. 3.9 – Répartition des taux d’erreur binaire aberrants - Égalisation par CMA - Modulation 3RC -  $h = 0.7$

0.5. Dans ce cas, le nombre de réalisations catastrophiques est toutefois légèrement moins élevé. À 10 dB comme à 15dB, seuls 2 taux d’erreur binaire sur 1000 dépassent 0.05.

Pour finir, les tableaux 3.2 et 3.3 représentent les taux d’erreur binaire moyens obtenus en excluant toutes les réalisations qui conduisent à un taux d’erreur binaire supérieur à 0.05. Ces observations confirment qu’en dépit de la dégradation inévitable des performances liée à la méconnaissance du canal de transmission, les taux d’erreur binaire

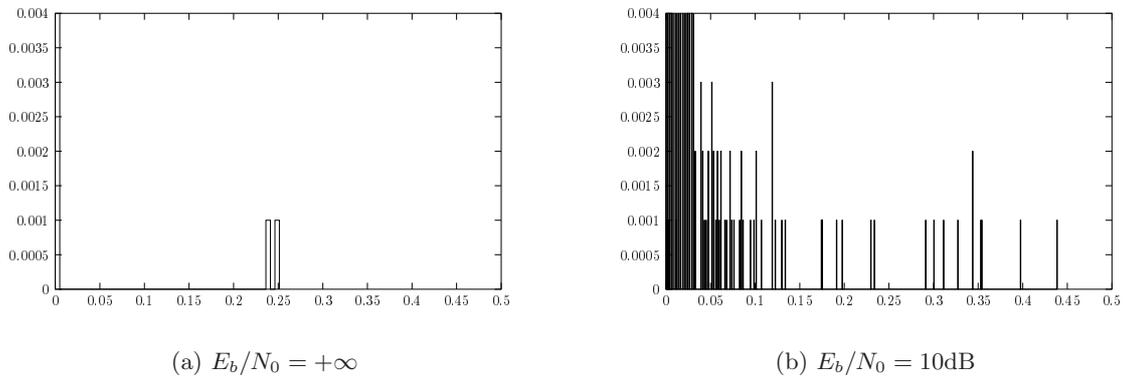


FIG. 3.10 – Répartition des taux d'erreur aberrants - Égalisation par CMA - Modulation 1REC -  $h = 0.5$

moyens obtenus après CMA restent comparables aux taux d'erreur binaire obtenus après un égaliseur de Wiener.

**Remarque 3.6 :** *L'ensemble des résultats ci-dessus permet d'évaluer les performances de la chaîne de réception constituée par l'égaliseur suivi d'un démodulateur cohérent, et non les performances de la seule étape d'égalisation. Parallèlement aux simulations précédentes, on peut donc légitimement s'interroger sur l'influence de l'étape d'égalisation sur les taux d'erreur binaire obtenus. Ainsi, il est intéressant de se demander quelles sont les performances que l'on observerait si aucun égaliseur n'était utilisé, c'est à dire si l'on appliquait directement l'algorithme de démodulation-synchronisation aux échantillons du signal reçu. Le tableau 3.4 représente le pourcentage de taux d'erreur binaire supérieurs à 0.05 observés en l'absence d'égalisation. On observe que, lorsque le signal reçu n'est pas égalisé, le pourcentage de taux d'erreur binaire aberrants est de l'ordre de 30 % dans le cas non bruité. Nous avons vu précédemment que le nombre d'échec est en revanche très faible lorsqu'un CMA est utilisé. Ces résultats illustrent le fait que le démodulateur cohérent n'est pas, à lui seul, suffisamment robuste aux canaux de propagation considérés. L'étape d'égalisation est indispensable.*

### 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les solutions du critère du module constant. Nous avons observé que le critère du module constant ne permet pas à coup sûr de récupérer une version retardée du signal émis en sortie de l'égaliseur. Toutefois, nos simulations indiquent que malgré l'existence de ces solutions *a priori* indésirables, le CMA, lorsqu'il est suivi d'un simple algorithme de synchronisation et de démodulation, conduit à des taux d'erreur qui sont tout à fait satisfaisants pour la grande majorité d'entre eux.

$E_b/N_0$	20 dB	15 dB	10 dB
Égalisation par CMA	$7 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$
Égalisation de Wiener	$3 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$

TAB. 3.2 – Taux d’erreur binaire moyens (hors réalisations catastrophiques) - Modulation 3RC -  $h = 0.7$

$E_b/N_0$	20 dB	15 dB	10 dB
Égalisation par CMA	$10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$
Égalisation de Wiener	$7 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-3}$

TAB. 3.3 – Taux d’erreur binaire moyens (hors réalisations catastrophiques) - Modulation 1REC -  $h = 0.5$

$E_b/N_0$	$+\infty$	20 dB	15 dB	10 dB
Modulation 1REC d’indice 0.5	33 %	35 %	40 %	52 %
Modulation 3RC d’indice 0.7	27.7 %	30 %	33.2 %	44 %

TAB. 3.4 – Pourcentage de  $TEB$  supérieurs à 0.05 en l’absence d’égalisation (pire cas)



---

## Chapitre 4

# Une application à l'estimation de la période symbole

Nous présentons ici une application possible des résultats du chapitre 3 à l'estimation de la période symbole. Nous montrons qu'une technique d'estimation initialement proposée par [3] dans le cas de modulations linéaires de symboles i.i.d., peut être adaptée au cas de modulations CPM.

### 4.1 Problématique

Comme au chapitre précédent, nous supposons qu'un signal produit par un émetteur inconnu utilisant une modulation CPM a été détecté et ramené en bande de base par rapport à la fréquence d'accord du récepteur. Les paramètres techniques de la modulation (période symbole, indice de modulation, résidu de fréquence porteuse, filtre de mise en forme) sont inconnus, et le signal transmis par l'émetteur est de surcroît perturbé par un canal de propagation à trajets multiples inconnu.

L'estimation de la période symbole du signal CPM reçu constitue une étape essentielle de la chaîne de traitements effectuée à la réception. En effet, la connaissance de la période symbole est nécessaire à la mise en œuvre de certaines méthodes d'égalisation présentées au chapitre précédent (à l'exception toutefois de l'algorithme du module constant (CMA) qui est susceptible d'être appliqué sans information sur  $T_s$ ). Nous verrons dans les chapitres suivants qu'elle est également indispensable au bon fonctionnement de certains estimateurs des paramètres techniques. Enfin, les démodulateurs présentés au chapitre 2 requièrent aussi une estimation préalable de  $T_s$ .

Habituellement, l'estimation aveugle de la période symbole  $T_s$  est effectuée en exploitant la propriété de cyclostationnarité des signaux de communications numériques : ces méthodes classiques, souvent appelées *méthodes cycliques*, reposent sur l'observation que la plus petite fréquence cyclique du signal reçu correspond à la vitesse de modulation  $\frac{1}{T_s}$ . La détection des fréquences cycliques fournit donc une estimée de la période symbole. Toutefois, lorsque l'excès de bande du signal observé est faible, la probabilité de fausse détection de la fréquence cyclique  $\frac{1}{T_s}$  augmente : les performances des méthodes cycliques peuvent alors être peu convaincantes.

Dans le cas où le signal observé est modulé linéairement, une approche alternative fondée sur l'optimisation de fonctions de contraste et permettant de palier à ce problème a récemment été proposée dans [3]. L'approche décrite dans [3] concerne uniquement le

cas de modulations linéaires de symboles i.i.d.. L'objectif de ce chapitre est de justifier l'application de cette méthode dans le cas de modulations CPM. Dans notre contexte, l'approche repose sur l'hypothèse essentielle qu'un filtrage passe-bas a eu lieu à l'émission ou à la réception. Dans ce cas, les résultats du chapitre précédent permettent de montrer que dans le cas de CPM à réponse complète, un filtre égaliseur numérique appliqué au signal reçu ne peut produire un signal de module constant en sortie que lorsque la période d'échantillonnage correspond à la période symbole. Ce résultat est généralisable au cas de CPM à réponse partielle sous réserve d'utiliser l'approximation proposée dans [11].

Avant de présenter dans le détail l'estimateur en question, nous commençons par rappeler le modèle de signal utilisé et par décrire brièvement le principe des méthodes cycliques.

## 4.2 Modèle de signaux

L'objectif que nous nous fixons dans le cadre de ce chapitre consiste à définir des techniques permettant d'estimer la période symbole à partir du signal reçu, et préalablement à tout autre traitement. En particulier, nous souhaitons estimer  $T_s$  avant l'étape d'égalisation à proprement parler. Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, cet objectif est justifié par le fait que la plupart des algorithmes d'égalisation décrits au chapitre précédent requièrent la connaissance de la période symbole.

Par conséquent nous adoptons le même modèle qu'au paragraphe 3.1.2. Un signal CPM  $s_a(t)$  défini par (2.1) est transmis et est distordu par un canal de propagation ainsi que par un éventuel filtre passe-bas d'émission et/ou de réception. On note comme précédemment  $y_a(t)$  l'enveloppe complexe du signal reçu et nous rappelons que  $y_a(t)$  peut être vu comme la sortie d'un filtre de réponse fréquentielle  $H(f)$  et de réponse impulsionnelle  $h_a(t)$  excité par  $s_a(t)$ . Le signal reçu est de surcroît perturbé par un bruit blanc gaussien additif  $b_a(t)$  de variance  $\sigma^2$  ainsi que par un éventuel résidu de fréquence porteuse  $\delta f_0$ . On peut finalement écrire  $y_a(t)$  de la manière suivante :

$$y_a(t) = (h_a(t) \star s_a(t)) e^{2i\pi\delta f_0 t} + b_a(t). \quad (4.1)$$

En pratique, le signal  $y_a(t)$  est échantillonné à une certaine période  $T_e$  quelconque, et on note  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  la suite des échantillons :  $y(k) = y_a(kT_e)$  pour tout entier  $k$ .

## 4.3 Estimation par détection de fréquences cycliques

### 4.3.1 Principe

Les techniques décrites ici sont très répandues et ont fait l'objet de nombreux travaux, notamment dans [32], [33], [34]. L'approche en question consiste à remarquer qu'un signal CPM est cyclostationnaire à l'ordre 2, et que le débit symbole  $1/T_s$  est sa plus petite fréquence cyclique strictement positive (*c.f.* l'étude des propriétés cycliques des modulations CPM [25]).

Rappelons qu'une fréquence  $\alpha$  est appelée fréquence cyclique de  $s_a(t)$  s'il existe au moins une valeur de  $\tau$  pour laquelle

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{2S} \int_{-S}^S E(s_a(t + \tau) s_a(t)^*) e^{-2i\pi\alpha t} dt \neq 0.$$

La quantité ainsi définie est appelée l'*autocorrélation cyclique* de  $y_a(t)$  à l'instant  $\tau$  et à la fréquence cyclique  $\alpha$ . En utilisant (4.1), on peut montrer que les fréquences cycliques de  $y_a(t)$  sont les mêmes que celles de  $s_a(t)$ . Par conséquent, estimer  $T_s$  revient à estimer la plus petite fréquence cyclique strictement positive du signal  $y_a(t)$ . Ce problème d'estimation est relativement classique, et se résout en pratique à partir du signal à temps discret  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  obtenu par échantillonnage de  $y_a(t)$  à une période  $T_e$ . On remarque en effet que  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est également cyclostationnaire, et que sa plus petite fréquence cyclique<sup>1</sup> positive correspond à  $\alpha_0 = \frac{T_e}{T_s}$ . Autrement dit, il existe un entier  $k$  tel que l'autocorrélation cyclique considérée au point  $k$  et à la fréquence cyclique  $\alpha_0$ , donnée par

$$\lim_{N_{obs} \rightarrow \infty} \frac{1}{2N_{obs}} \sum_{-N_{obs}}^{N_{obs}} E(y(n+k)y(n)^*) e^{-2i\pi n \alpha_0},$$

est non nulle. Estimer  $T_s$  équivaut donc à estimer la plus petite fréquence cyclique  $\alpha_0$  de  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Pour ceci, on peut par exemple définir l'estimée  $\hat{\alpha}$  de  $\alpha_0$  comme l'argument du maximum d'une certaine fonction de coût définie de la manière suivante :

$$\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha \in I_\alpha} \sum_{k=-K}^K |\hat{R}^\alpha(k)|^2$$

où  $\hat{R}^\alpha(k)$  est l'estimateur de l'autocorrélation cyclique de  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  à la fréquence cyclique  $\alpha$  et à l'instant  $k$ , défini par

$$\hat{R}^\alpha(k) = \frac{1}{N_T} \sum_{n=0}^{N_T-1} y(n+k)y(n)^* e^{-2i\pi n \alpha}.$$

$I_\alpha$  représente ici un intervalle de recherche ne contenant pas 0.  $N_T$  correspond au nombre d'échantillons disponibles. Enfin,  $K$  est un paramètre qu'il convient de choisir de façon appropriée.

Il est bien connu que le succès de ce type d'approche est conditionné par l'excès de bande du signal reçu. En effet, si la bande passante du signal  $s_a(t)$  est numériquement de l'ordre de  $\frac{1}{T_s}$ , l'autocorrélation cyclique de  $y_a(t)$  prend des valeurs très faibles. La méthode introduite ci-dessus conduit alors à des performances qui peuvent être catastrophiques si l'on ne dispose pas d'un grand nombre d'échantillons.

### 4.3.2 Utilisation de la fréquence instantanée

Le problème évoqué ci-dessus peut être en partie contourné en considérant d'autres statistiques que les statistiques d'ordre 2. Par exemple, [34] suggère d'opérer sur des statistiques cycliques d'ordre supérieur bien choisies, ce qui a pour effet d'atténuer les éventuels effets de la limitation en bande du signal  $y_a(t)$ . Une méthode plus communément utilisée consiste à appliquer une transformation non linéaire bien choisie au signal  $y_a(t)$ . On peut alors estimer  $T_s$  grâce aux statistiques cycliques d'ordre 2 du signal résultant. Le problème le plus délicat réside alors dans le choix de la non linéarité. Il ressort des différents tests que

<sup>1</sup>Dans le cas de signaux à temps discret, le terme de fréquences cycliques désigne en réalité les fréquences cycliques normalisées par la fréquence d'échantillonnage  $1/T_e$ .

nous avons effectués que, dans le cas de modulations CPM, la fréquence instantanée du signal  $y_a(t)$  se prête bien à une détection des fréquences cycliques à partir des statistiques d'ordre 2. On constate en effet que la fréquence instantanée de  $y_a(t)$  possède toujours  $1/T_s$  comme plus petite fréquence cyclique positive et que sa bande passante est en général plus grande que celle du signal modulé.

### 4.3.3 Estimation de la fréquence instantanée

En pratique, seuls les échantillons  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  sont disponibles au niveau du récepteur. Il n'est donc pas envisageable d'extraire la fréquence instantanée à proprement parler et nous devons nous contenter de l'estimation d'une version échantillonnée de cette fréquence instantanée.

On suppose que le signal  $y_a(t)$  est échantillonné à une cadence  $T_e$  sensiblement supérieure à sa bande passante. La démarche consiste à extraire la phase de  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , et à approximer la fréquence instantanée par la différence de phase entre deux instants consécutifs (ou éventuellement un schéma de différences finies plus évolué). La difficulté inhérente à cette méthode provient du fait que la phase à chaque instant est définie modulo  $2\pi$ . Afin d'expliquer les conséquences de ce simple état de fait, supposons pour commencer que le bruit additif  $b_a(t)$  est nul et désignons par  $\text{Arg}(y_a(t))$  la phase du signal  $y_a(t)$ . Sans autre précision,  $\text{Arg}(y_a(t))$  est définie pour tout  $t$  à un multiple de  $2\pi$  près. Toutefois, en rappelant que la phase du signal CPM émis est continue par définition, on peut montrer que pour tout  $t$  il existe une détermination de  $\text{Arg}(y_a(t))$  telle que, au final, la fonction  $\text{Arg}(y_a(t))$  soit une fonction continue. En pratique, on ne dispose que des échantillons  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Il s'agit donc de choisir la bonne détermination de  $\text{Arg}(y(n))$  afin de pouvoir calculer l'estimée  $\hat{f}_i(nT_e)$  au point  $nT_e$  par :

$$\hat{f}_i(nT_e) = \frac{\text{Arg}(y(n)) - \text{Arg}(y(n-1))}{2\pi}.$$

Pour cela, nous proposons d'utiliser le fait que les déterminations en question sont celles qui rendent la suite des phases la plus proche de l'échantillonnée d'une fonction continue. Il faut donc à chaque instant  $n$  choisir la détermination qui est la plus proche de celle qui a été extraite à l'instant  $n-1$ . Autrement dit, on applique la procédure suivante :

Supposons que la détermination de  $\text{Arg}(y(n))$  a été correctement identifiée à l'instant  $n-1$ . Alors  $\text{Arg}(y(n))$  est défini comme la détermination pour laquelle  $|\text{Arg}(y(n)) - \text{Arg}(y(n-1))|$  est minimum.

Dans le cas non bruité, cette procédure, que l'on désigne par *déploiement de phase*, permet d'extraire la suite  $\text{Arg}(y(n))$  dès que  $T_e$  est suffisamment petit. En présence de bruit, la même procédure est utilisée. Toutefois, l'influence du bruit additif peut provoquer des *erreurs de déploiement de phase*. Nous verrons dans les chapitres suivants que de telles erreurs peuvent avoir des conséquences fâcheuses sur certains estimateurs utilisant la phase instantanée, comme l'estimateur de l'indice de la modulation (*c.f.* chapitre 5). En revanche, l'estimateur de la période symbole qui repose sur la fréquence instantanée ne souffre guère des erreurs de déploiement de phase.

**Remarque 4.1 :** *Comme nous l'avons observé, la procédure de déploiement ci-dessus nécessite que la période d'échantillonnage  $T_e$  soit suffisamment petite. Si ce n'est pas le cas, les échantillons  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  peuvent être utilisés afin de générer les échantillons  $(y_a(nT_e'))_{n \in \mathbb{Z}}$*

du signal  $y_a(t)$  à une période  $T'_e = T_e/P$ , où  $P$  est un entier suffisamment grand. Ceci peut être réalisé grâce à un filtre interpolateur, dès que  $T_e$  vérifie (numériquement) le théorème de Shannon. La procédure de déploiement de phase précédente est alors appliquée à  $(y_a(nT'_e))_{n \in \mathbb{Z}}$  et permet de générer une estimée de la fréquence instantanée échantillonnée à la période  $T'_e$ . On récupère enfin la suite  $(\hat{f}_i(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  de cadence  $T_e$  par décimation.

#### 4.3.4 Méthode d'estimation de $T_s$

La procédure de déploiement de phase présentée au paragraphe précédent permet d'obtenir un estimateur de la fréquence instantanée échantillonnée à une période  $T_e$ , soit  $(\hat{f}_i(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Ce signal à temps discret possède  $\alpha_0 = T_e/T_s$  comme fréquence cyclique. Par conséquent, on peut estimer  $\alpha_0$  comme dans [33] en procédant comme suit. Nous posons :

$$\hat{R}_{N_T}^\alpha(k) = \frac{1}{N_T} \sum_{n=0}^{N_T-1} \hat{f}_i(n+k) \hat{f}_i(n)^* e^{-2i\pi n \alpha}$$

et  $\hat{\mathbf{R}}_{N_T}^\alpha = [\hat{R}^\alpha(-K), \dots, \hat{R}^\alpha(K)]^T$  où  $K$  est un entier fixe qu'il convient de fixer. On définit la fonction de coût  $J_{N_T}(\alpha)$  par :

$$\begin{aligned} J_{N_T}(\alpha) &= \|\hat{\mathbf{R}}_{N_T}^\alpha\|^2 \\ &= \sum_{k=-K}^K |\hat{R}_{N_T}^\alpha(k)|^2. \end{aligned}$$

Nous proposons d'estimer  $\alpha_0$  de la manière suivante :

$$\hat{\alpha}_{N_T} = \arg \min_{\alpha \in I_\alpha} J_{N_T}(\alpha)$$

où  $I_\alpha$  est un intervalle de recherche qui ne doit pas contenir 0. Le choix de l'intervalle de recherche est particulièrement important. En effet, 0 est bien entendu une fréquence cyclique du signal  $(\hat{f}_i(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , et les statistiques cycliques de  $\hat{f}_i$  à la fréquence cyclique 0 sont bien plus conséquentes qu'en  $\alpha = \alpha_0$ , notamment si le filtre de mise en forme  $g_a(t)$  a peu d'excès de bande. Il a été montré dans [33] que, bien que  $\hat{R}_{N_T}^\alpha(k)$  tende vers 0 si  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha \neq \alpha_0$ , les fluctuations statistiques de  $\|\hat{\mathbf{R}}_{N_T}^\alpha\|^2$  pour  $\alpha$  proche de 0 pouvaient être du même ordre de grandeur que  $\|R^{\alpha_0}\|^2 = \sum_{k=-K}^K |R^{\alpha_0}(k)|^2$  si l'excès de bande de  $g_a(t)$  est faible et si  $N_T$  n'est pas très important. Ceci montre l'intérêt d'exclure de l'intervalle de recherche les points situés au voisinage de 0. En pratique, ceci peut être réalisé car on peut avoir une idée de la bande passante du signal intercepté. On peut donc obtenir une information *a priori* sur la valeur de  $T_s$  en remarquant que la bande passante bilatérale d'un signal modulé CPM est numériquement inférieure à  $2/T_s$ . Dès lors, il est raisonnable de supposer que  $\alpha_0$  est supérieur à  $\frac{B T_e}{2}$ . Cette valeur peut servir de borne inférieure pour l'extrémité inférieure de l'intervalle de recherche  $I_\alpha$ .

Le problème du choix de  $K$  est également abordé dans [33] où il est préconisé de prendre  $K$  de l'ordre de la durée de la forme d'onde  $g_a(t)$ . Il convient en particulier de remarquer que le choix  $K = 0$ , souvent considéré dans la littérature, peut ne pas être pertinent dans notre contexte : il se peut en effet que  $R^{(\alpha_0)}(0) = 0$  pour certains des filtres de mise en forme très utilisés, correspondant par exemple aux modulations 1REC ou 3RC.

### ■ Critère pondéré

Dans le cas où l'excès de bande du signal  $y_a(t)$  est très faible (ce qui est notamment le cas pour certaines modulations CPM) l'utilisation d'un intervalle de recherche excluant les valeurs trop proches de 0 peut ne pas suffire pour résoudre les problèmes posés par la faiblesse des statistiques cycliques en  $\alpha_0$ . Dans un tel cas, la fonction de coût atteint son maximum près de l'extrémité inférieure de  $I_\alpha$ . [33] propose alors d'utiliser une approche que nous qualifierons de pondérée, qui consiste à maximiser une fonction de coût du type

$$J_{N_T, \mathbf{w}}(\alpha) = \hat{\mathbf{R}}_{N_T}^\alpha * \mathbf{W}(\alpha) \hat{\mathbf{R}}_{N_T}^\alpha$$

où  $\mathbf{W}(\alpha)$  est une matrice de pondération positive choisie de façon à ce que la loi asymptotique de  $J_{N_T, \mathbf{w}}(\alpha)$  ne dépende pas de  $\alpha$ . Comme le vecteur  $\hat{\mathbf{R}}_{N_T}^\alpha$  est asymptotiquement gaussien, cette matrice coïncide avec l'inverse de la matrice de covariance asymptotique du vecteur  $\hat{\mathbf{R}}_{N_T}^\alpha$ . Cette observation permet d'exprimer analytiquement  $\mathbf{W}(\alpha)$  (c.f. [33]). Bien entendu, cette matrice de pondération dépend de paramètres inconnus, mais on peut l'estimer pour tout  $\alpha$  de façon consistante à partir des observations. Cette matrice est en général mal conditionnée, de sorte qu'il faut en pratique ne pas utiliser brutalement l'inverse de son estimée dans le critère, mais la pseudo-inverse de sa troncature à ses valeurs propres significatives. Dans la section consacrée aux simulations, nous comparerons l'approche non pondérée ( $\mathbf{W}(\alpha)$  coïncide avec l'identité) avec cette approche pondérée, et verrons que, dans les contextes de simulation considérés, l'approche pondérée permet d'améliorer de façon substantielle les performances.

En pratique, la minimisation de  $J_{N_T}$  sur l'intervalle  $I_\alpha$  s'effectue en deux étapes. La première étape consiste à évaluer  $J_{N_T}(\alpha)$  sur la grille des points  $k/N_T, k = 0, \dots, N_T - 1$  grâce à un algorithme de FFT. On détermine alors en quel point de la grille de  $I_\alpha$  la fonction est maximale. La deuxième phase consiste à effectuer une recherche plus fine par le biais d'un algorithme du gradient initialisé au point trouvé lors de la première étape. Notons que dans le cas pondéré, la fonction de coût utilisée dans cette deuxième étape est celle du cas  $\mathbf{W}(\alpha) = I$  car la pondération ne présente pas d'intérêt dans le cadre d'une recherche fine (voir [32]).

## 4.4 Estimation par le critère du module constant

En dépit de l'amélioration obtenue grâce à l'utilisation du critère pondéré, les méthodes cycliques peuvent présenter des performances insatisfaisantes lorsque l'excès de bande du signal modulé est faible et lorsque la durée d'observation est insuffisante.

Lorsque le signal émis est une modulation linéaire d'une suite de symboles i.i.d., une approche alternative fondée sur l'optimisation de fonctions de contraste et permettant de palier à ce problème a été proposée dans [3]. Notre objectif est de justifier l'application de cette méthode dans le cas de modulations CPM. La procédure d'estimation proposée repose sur la mise en évidence des solutions du module constant effectuée au chapitre 3. Plus précisément, la méthode repose sur une caractérisation des filtres numériques qui, lorsqu'ils sont excités par un signal CPM filtré passe-bas, produisent un signal de module constant. Dans le cas d'un échantillonnage du signal reçu à une période  $T_e$  quelconque, le signal récupéré en sortie d'un égaliseur numérique est systématiquement de module strictement

supérieur à 1. Dans le cas de CPM à réponse complète, nous montrons qu'en revanche il existe un égaliseur numérique tel que son signal de sortie vérifie la condition de module constant. Cette remarque permet de définir un estimateur de la période symbole. Dans le cas de CPM à réponse partielle, il n'est pas garanti en revanche qu'un échantillonnage à la période symbole permette d'obtenir un signal égalisé de module 1, mais une approximation des modulations CPM proposée et étudiée dans [11] permet de penser que la méthode est généralisable au cas de CPM à réponse partielle.

#### 4.4.1 Résultat fondamental

Comme précédemment, nous supposons que le signal  $s_a(t)$  fait l'objet d'un éventuel *filtrage d'émission* destiné à limiter la bande de  $s_a(t)$  (en théorie infinie), et que le signal émis est distordu par un canal de propagation inconnu. Nous considérons en outre que le signal reçu fait l'objet d'un *filtrage de réception* passe-bas de fréquence de coupure  $F_R$ . Dans ce qui suit, nous supposons pour simplifier que la fréquence porteuse de l'émetteur est connue du récepteur et donc que le signal reçu a pu être ramené en bande de base. L'approche peut toutefois être généralisée sans difficulté au cas où un résidu de fréquence porteuse est présent.

**Remarque 4.2 :** *A ce stade, il est important de remarquer que le signal  $y_a(t)$  est à bande limitée en raison de la présence d'un filtre passe-bas en émission et/ou en réception. Nous supposons dans la suite que ce filtre est tel que la bande passante unilatérale de  $y_a(t)$  est inférieure à  $\frac{2}{T_s}$  (excès de bande inférieur à 100 pour cent).*

Comme l'indique le schéma synoptique de la figure 4.1, le signal  $y_a(t)$  obtenu en sortie du filtre de passe-bas de réception est ensuite échantillonné à une période  $T_e$ . Nous supposons en outre qu'un filtre passe-bas anti-repliement de fréquence de coupure  $\frac{1}{2T_e}$  est appliqué préalablement à l'échantillonnage : ceci revient à considérer que le signal reçu est filtré dans la bande  $[-\min(\frac{1}{2T_e}, F_R), \min(\frac{1}{2T_e}, F_R)]$  avant d'être échantillonné.

Soit  $g(z)$  la fonction de transfert d'un égaliseur numérique fonctionnant à la cadence  $T_e$ . On désigne par  $(z_{T_e}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  le signal à temps discret en sortie de l'égaliseur excité par les échantillons  $(y_a(nT_e))_{n \in \mathbb{Z}}$  :

$$z_{T_e}(n) = [g(z)] y_a(nT_e).$$

Pour toute période d'échantillonnage et pour tout filtre numérique  $g(z)$ , on définit comme au chapitre précédent le critère du module constant par :

$$J_{T_e}(g) = \lim_{N_{obs} \rightarrow \infty} \frac{1}{N_{obs}} \sum_{n=0}^{N_{obs}-1} E(|z_{T_e}(n)|^2 - 1)^2. \quad (4.2)$$

Nous démontrons le résultat suivant

**Résultat 4.1 :** *Supposons que la bande passante unilatérale du signal  $y_a(t)$  soit inférieure à  $\frac{2}{T_s}$ . Supposons également que la réponse fréquentielle  $H(f)$  du canal de propagation ne s'annule pas dans l'intervalle de fréquence  $[-\frac{1}{2T_s}, \frac{1}{2T_s}]$ . Alors le critère  $\Upsilon(T_e)$  défini par :*

$$\Upsilon(T_e) = \inf_{g(z)} J_{T_e}(g) \quad (4.3)$$

vérifie les deux conditions suivantes :

- si  $T_e \neq T_s$ , alors  $\Upsilon(T_e) > 0$ ,
- si  $T_e = T_s$ , alors, dans le cas de CPM à réponse complète,  $\Upsilon(T_s) = 0$ .

Nous montrons en annexe pourquoi les résultats du chapitre précédent rendent la condition  $\Upsilon(T_e) = 0$  impossible tant que  $T_e \neq T_s$ . Ceci est fondamentalement lié à la présence d'un filtre passe-bas dans la chaîne de transmission. Il nous semble utile d'expliquer ici pourquoi  $\Upsilon(T_s) = 0$  dans le cas de modulations CPM à réponse complète. Il suffit pour cela de vérifier que si  $T_e = T_s$ , alors il existe un filtre égaliseur  $g(z)$  qui, lorsqu'il est excité par les échantillons  $(y(n) = y_a(nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  du signal reçu, produit une sortie de module constant. Ceci est dû au fait déjà mentionné au chapitre précédent que, quel que soit le canal de transmission considéré et indépendamment de la présence ou non d'un filtre de réception, les échantillons du signal reçu peuvent s'exprimer comme le résultat d'un filtrage numérique de la suite de pseudo-symboles  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Justifions cette affirmation. Le signal reçu  $y_a(t)$  peut s'écrire comme une version filtrée du signal émis :

$$y_a(t) = h_a(t) \star s_a(t),$$

où  $s_a(t)$  est le signal CPM à réponse complète émis. En remplaçant  $s_a(t)$  dans l'équation ci-dessus par sa représentation de Laurent (2.10), nous pouvons alors exprimer le signal reçu comme le résultat d'un filtrage analogique d'une unique suite de pseudo-symboles  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  :

$$y_a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k) \tilde{h}_a(t - kT_s), \quad (4.4)$$

où le filtre  $\tilde{h}_a(t)$  correspond au produit de convolution entre la fonction de mise en forme de Laurent  $c(t)$  et la réponse impulsionnelle du canal  $h_a(t)$ . Nous obtenons donc immédiatement l'expression suivante des échantillons  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  du signal reçu à la période symbole :

$$y(n) = [h(z)]x(n), \quad (4.5)$$

où le filtre  $h(z)$  est défini par :

$$h(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_a(kT_s) z^{-k}.$$

L'expression (4.5) indique que les échantillons du signal reçu peuvent s'exprimer comme le résultat d'un filtrage numérique de la suite de pseudo-symboles  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Ainsi, nous constatons immédiatement que la sortie de l'égaliseur numérique de fonction de transfert  $g(z) = 1/h(z)$  excité par les échantillons  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  du signal reçu coïncide avec la suite  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  des pseudo-symboles, d'après l'équation (4.5). En particulier, cette suite est de module constant égal à 1, et le critère du module constant est donc nul pour cet égaliseur particulier. Par conséquent,  $\Upsilon(T_s) = 0$  dans le cas de CPM à réponse complète.

**Remarque 4.3 :** Notons d'abord que  $\Upsilon(T_e)$  est nul si et seulement s'il existe un filtre numérique  $g(z)$  tel que le signal de sortie  $z_{T_e}(n)$  soit de module constant égal à un. Le résultat précédent signifie donc que si l'excès de bande du signal reçu est inférieur à 100 pour cent, et que l'on échantillonne le signal reçu à une cadence  $T_e$  différente de  $T_s$ , alors on ne peut pas trouver de filtre égaliseur  $g(z)$  fonctionnant à la cadence  $T_e$  qui, excité par

$y_a(nT_e)$ , fournisse un signal de module constant égal à un. Inversement, dans le cas de CPM à réponse complète, un tel filtre existe si  $T_e = T_s$ .

**Remarque 4.4 :** Bien entendu, l'hypothèse la plus fondamentale est le caractère bande limitée de  $y_a(t)$  qui est incompatible avec la propriété de module constant en sortie d'égaliseur dès que  $T_e \neq T_s$ . Dans le cas de signaux CPM non filtrés à l'émission, un filtrage passe-bas de réception semble donc essentiel afin de limiter autant que possible l'excès de bande du signal reçu. Quand  $T_e \neq T_s$ , on peut en effet conjecturer que plus l'excès de bande du signal reçu est rendu faible, plus la fonction de coût  $\Upsilon(T_e)$  est grande, ce qui favorise évidemment la détection de  $T_s$ .

**Remarque 4.5 :** Bien qu'à bande illimitée, certains types de signaux CPM n'ont qu'un très faible excès de bande (autrement dit, leur densité spectrale est non nulle mais néanmoins proche de zéro pour des fréquences supérieures à  $\frac{1}{2T_s}$ ). Dans ce cas de figure, malgré les éventuels filtrages d'émission et de réception, on peut intuitivement envisager que certains filtres égaliseurs  $g(z)$  soient tels que  $z_{T_e}(n)$  est de module proche de 1, indépendamment de la période d'échantillonnage  $T_e$  utilisée. La caractérisation de  $T_s$  proposée conduit donc à de meilleures performances lorsque la bande passante de  $y_a(t)$  est significativement plus faible que celle de  $s_a(t)$ .

Dans le cas de CPM à réponse partielle, il reste vrai que  $\Upsilon(T_e)$  est strictement positive lorsque  $T_e \neq T_s$ . En revanche, rien ne garantit de manière rigoureuse qu'un filtre égaliseur fonctionnant à la cadence  $T_s$  puisse conduire à un signal égalisé de module 1. Autrement dit, pour des CPM à réponse partielle, nous avons en général  $\Upsilon(T_s) > 0$ . Toutefois, il nous semble malgré tout raisonnable de généraliser la méthode au cas de modulations CPM à réponse partielle. Nous donnons maintenant une justification intuitive de cette conjecture.

Appelons comme précédemment  $s_a(t)$  le signal CPM émis et considérons cette fois qu'il s'agit d'un signal CPM à réponse partielle. La représentation de Laurent de signaux CPM à réponse partielle permet d'écrire  $s_a(t)$  comme une somme de modulations linéaires de pseudo-symboles :

$$s_a(t) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_\nu(k) c_\nu(t - kT_s) \right). \quad (4.6)$$

Or il a été démontré dans [11] qu'un signal CPM à réponse complète pouvait être approximé avec une très bonne précision par le signal  $\tilde{s}_a(t)$  obtenu en ne conservant que le terme de la somme précédente correspondant à  $\nu = \{1, 2, \dots, L-1\}$ , c'est à dire en ne conservant que la fonction de mise en forme principale de Laurent. Afin de simplifier les notations, désignons par  $c_P(t)$  la fonction de mise en forme principale et désignons par  $(x_P(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  la suite de pseudo-symboles définie pour tout  $n$  par :

$$x_P(n) = x_{\{1,2,\dots,L-1\}}(n) = \exp \left( i\pi h \sum_{j=-\infty}^n a_j \right).$$

Nous pouvons donc écrire que le signal  $s_a(t)$  est numériquement proche du signal :

$$\tilde{s}_a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_P(k) c_P(t - kT_s).$$

Il est donc raisonnable de conjecturer que le signal  $y_a(t)$  reçu est proche du signal  $\tilde{y}_a(t) = h_a(t) \star \tilde{s}_a(t)$ . Or, en suivant le même raisonnement que celui tenu un peu plus haut dans le cas de CPM à réponse complète, les échantillons  $(\tilde{y}(n) = \tilde{y}_a(nT_s))_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $\tilde{y}_a(t)$  peuvent s'écrire comme une version numériquement filtrée de la suite  $(x_P(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , c'est à dire que l'on peut exhiber un filtre numérique de fonction de transfert  $h(z)$  telle que :

$$\tilde{y}(n) = [h(z)]x_P(n). \quad (4.7)$$

Comme il est raisonnable de penser que les échantillons  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  du signal effectivement reçu sont numériquement proches de  $(\tilde{y}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , il apparaît que la sortie du filtre égaliseur  $g(z) = 1/h(z)$  excité par ces échantillons fournit une sortie numériquement très proche de  $(x_P(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , qui est par ailleurs une suite de module constant égal à 1. Il semble donc qu'il existe des égaliseurs numériques qui produisent une sortie dont le module est presque constant. Ceci permet donc de penser que la valeur de  $\Upsilon(T_s)$  est en pratique proche de zéro.

Nous avons donc montré que, si le signal CPM à réponse partielle peut être approximé par la "modulation linéaire principale" de Laurent, alors  $\Upsilon(T_s) = 0$ . Donc, le fait que la valeur  $\Upsilon(T_s)$  soit strictement positive est uniquement dû au fait qu'une modulation CPM ne coïncide pas rigoureusement avec son approximation de Laurent. La distance entre le signal CPM émis et son approximation de Laurent est donc le facteur clé qui influe sur la valeur de  $\Upsilon(T_s)$ . En revanche, l'action du filtre passe-bas n'a pas d'influence sur les considérations précédentes. Nous pouvons donc raisonnablement penser que la présence ou non d'un filtrage passe-bas n'affecte pas la valeur de  $\Upsilon(T_s)$ . Au contraire, lorsque la période d'échantillonnage  $T_e$  est différente de  $T_s$ , nous avons vu que l'introduction d'un filtre passe-bas dans la chaîne de transmission influe sur la valeur de  $\Upsilon(T_e)$ . Comme nous l'avons expliqué plus haut, nous pouvons conjecturer que plus l'excès de bande du signal reçu est rendu faible, plus la fonction de coût  $\Upsilon(T_e)$  est grande.

Ces considérations laissent donc penser que la méthode est généralisable au cas de CPM à réponse partielle.

#### 4.4.2 Procédure d'estimation

Afin d'estimer  $T_s$  grâce au résultat 4.1, nous proposons d'échantillonner le signal  $y_a(t)$  à une fréquence initiale  $T_i$ , puis de générer par interpolation le signal  $y_a(nT_e)$  pour chaque valeur de  $T_e$  appartenant à une grille discrète de points bien choisie. Pour chaque  $T_e$ , un CMA (Constant Modulus Algorithm) permet de construire un égaliseur  $g(z)$  fonctionnant à la cadence  $T_e$  et qui minimise le critère du module constant  $J_{T_e}(g)$ . La valeur minimale du critère est égale à  $\Upsilon(T_e)$ . La figure 4.1 illustre le procédé ci-dessus. On obtient alors un

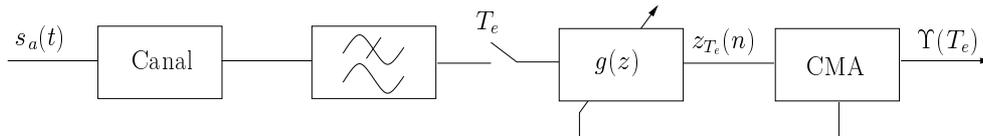


FIG. 4.1 – Génération de la fonction de coût  $\Upsilon(T_e)$

estimateur initial de la période symbole en cherchant le point  $\hat{T}_s$  de la grille pour lequel  $\Upsilon(T_e)$  est minimum. Si la densité de la grille n'est pas suffisante pour produire un estimateur de  $T_s$  de variance suffisamment faible, il est possible de réitérer la procédure sur une

grille étroite et dense centrée sur  $\hat{T}_s$ .

L'inconvénient majeur de cette approche est évidemment sa complexité : elle nécessite en effet de mettre en œuvre un égaliseur en tout point de la grille, alors que les méthodes cycliques sont quant à elles beaucoup moins complexes. Cependant, une application telle que l'écoute passive n'induit pas nécessairement de contrainte de temps réel, et n'est donc pas incompatible avec l'utilisation de la méthode proposée.

#### 4.4.3 Complémentarité de la méthode proposée et des méthodes cycliques

La fonction de coût  $\Upsilon(T_e)$  ne se prête pas à une optimisation par algorithme du gradient. Si la densité de la grille n'est pas suffisante pour produire un estimateur de variance suffisamment faible, il est donc nécessaire de réitérer la procédure d'optimisation de  $\Upsilon(T_e)$  sur une grille plus étroite et centrée sur la première estimée de  $T_s$ .

En revanche, les méthodes cycliques permettent de mettre en œuvre un algorithme du gradient. Toutefois, elles sont basées sur la minimisation d'une fonction de coût souffrant de nombreux maxima locaux et nécessitent donc d'utiliser, comme dans la méthode proposée, une recherche exhaustive sur une grille afin de mettre en évidence une estimée initiale de  $T_s$ . Lorsque l'estimée initiale ainsi obtenue ne coïncide pas avec le point de la grille le plus proche de  $T_s$  (on parle alors de fausse détection), l'algorithme du gradient peut être mis en échec.

Par conséquent, une procédure globale d'estimation de la période symbole consiste à effectuer dans un premier temps une recherche exhaustive en utilisant celle des deux méthodes mentionnées qui fournit le plus faible pourcentage de fausses détections, puis, dans un deuxième temps, d'initialiser un algorithme du gradient basé sur les méthodes cycliques. Il reste donc à déterminer par simulation le pourcentage de fausses détections correspondant à chacune des méthodes.

## 4.5 Simulations

Dans ce paragraphe, nous comparons les performances de l'estimateur basé sur le critère du module constant et de l'estimateur basé sur la détection de fréquences cycliques. Nous évaluons expérimentalement le pourcentage de fausses détections sur la période symbole correspondant à chacune des deux méthodes.

### 4.5.1 Contextes de simulation

Les contextes de simulation testés sont les suivants. Nous supposons que l'émetteur utilise une modulation de type 1REC ou 3RC. L'indice de modulation est égal à  $h = 0.7$ . Pour chaque réalisation du signal émis, le rythme symbole  $1/T_s$  est tiré de manière uniforme dans un intervalle du type  $[1/(\overline{T}_s + \epsilon_{T_s}), 1/(\overline{T}_s - \epsilon_{T_s})]$ .  $\overline{T}_s$  représente la valeur moyenne statistique de  $T_s$  sur l'ensemble des réalisations. Dans nos simulations, nous avons choisi  $\epsilon_{T_s} = 10^{-3}\overline{T}_s$ .

Pour chaque réalisation du signal émis, un canal de transmission multi-trajets est tiré aléatoirement selon la même procédure qu'au paragraphe 3.7. Le nombre de trajets est compris entre 2 et 5 (inclus) et est tiré de manière uniforme ; les retards sont compris entre 0 et  $5T_s$  et sont eux aussi tirés uniformément ; les amplitudes complexes des trajets sont des variables aléatoires gaussiennes complexes et indépendantes entre elles.

Le bruit est supposé blanc gaussien dans la bande  $[-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}]$ . Le rapport signal sur bruit pris en compte est le rapport  $E_b/N_0$  de l'énergie par bit reçue par la densité spectrale du bruit.

Le signal est observé sur un intervalle de temps correspondant à la transmission de 1000 symboles.

#### 4.5.2 Méthode cyclique

En ce qui concerne la méthode cyclique, nous nous contentons d'un filtrage de réception dans la bande  $[-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}]$ . Comme nous l'avons expliqué au début de ce chapitre, la méthode cyclique mise en œuvre consiste à détecter la première raie de l'autocorrélation cyclique de la *fréquence instantanée* du signal reçu  $y_a(t)$ . Nous utilisons en outre la pondération définie au paragraphe 4.3.4. La recherche exhaustive du débit symbole s'effectue en calculant le critère cyclique pondéré sur une grille linéaire comprise dans l'intervalle de fréquences  $[\frac{2}{3T_s}, \frac{2}{T_s}]$  et dont le pas est égal à  $5 \cdot 10^{-4}$ . Rappelons que la méthode pondérée nécessite d'estimer l'inverse de la matrice de covariance asymptotique du vecteur  $\hat{\mathbf{R}}_{N_T}^\alpha$ . Nous avons vu que cette opération nécessite de tronquer la matrice de covariance à ses valeurs propres significatives. Le nombre de valeurs propres significatives est bien entendu un paramètre *ad hoc* délicat à fixer. Dans les simulations, nous inversons la matrice en question en ne conservant que les 6 valeurs propres les plus élevées. Le second paramètre *ad hoc* à choisir est le nombre  $K$  de coefficients de corrélation à prendre en compte. Nous choisissons  $K$  de telle manière que la durée de corrélation soit environ égale à deux périodes symboles. Nous avons fixé ces paramètres en nous basant sur des tests préalables ayant permis de déterminer quelles sont les valeurs qui conduisent aux meilleures performances. En règle générale, un choix non approprié du nombre de valeurs propres significatives et de l'entier  $K$  est susceptible d'entraîner une baisse des performances, par comparaison avec celles mentionnées ci-après.

Le tableau 4.1 représente les performances de l'estimateur basé sur la détection de fréquences cycliques, en terme de pourcentage de fausses détections, pour des modulations 1REC ou 3RC d'indice 0.7.

$E_b/N_0$	20dB	15dB	10dB
1REC	1.5	2.5	4
3RC	29	47	72

TAB. 4.1 – Pourcentage de fausses détections occasionnées par la méthode cyclique -  $h = 0.7$

La méthode donne de meilleurs résultats dans le cas de modulations 1REC que dans le cas de modulations 3RC : cette constatation n'est en rien surprenante dans la mesure où les signaux 1REC ont un excès de bande plus important que les signaux 3RC. Le pourcentage de fausses détections est tout à fait satisfaisant dans le cas de modulations 1REC. En revanche, il s'avère catastrophique pour des modulations 3RC, en tout cas lorsque la durée

de l'observation est relativement courte (1000 symboles). Donc, la méthode cyclique peut tout à fait convenir pour des modulations de type 1REC, mais pour des modulations 3RC, il est utile de proposer des solutions alternatives.

### 4.5.3 Méthode basée sur le critère du module constant

Nous supposons que la bande du signal reçu a été approximativement détectée. La méthode proposée suppose qu'un filtrage passe-bas de fréquence de coupure  $F_R$  est appliqué au signal reçu. Dans les simulations suivantes, nous avons choisi par défaut une fréquence de coupure égale à  $F_R = 0.6/\overline{T_s}$ . En outre, lorsque  $T_e > 1/2F_R$ , nous imposons avant échantillonnage à  $T_e$  un filtrage dans la bande  $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$ . Nous appliquons aux échantillons du signal reçu un filtre égaliseur à  $N_{eg} = 20$  coefficients fonctionnant à la cadence  $T_e$  et nous minimisons le critère du module constant grâce au CMA. Le CMA est stoppé lorsque la quantité  $\Delta^{(j)}$  définie par (3.76) devient inférieure à  $(10^{-3})^2$  en imposant toutefois un minimum de 15 itérations et un maximum de 500 itérations.

Pour estimer les performances de la méthode proposée, nous dénombrons le nombre de réalisations du signal émis et du canal conduisant à une fausse détection de  $T_s$ . Afin d'avoir une idée des performances moyennes, il est nécessaire d'appliquer la procédure d'estimation à un grand nombre de réalisations différentes du canal, afin d'obtenir un effet de moyenne sur les performances sur l'ensemble des canaux possibles. La méthode mise en œuvre étant particulièrement coûteuse en temps de calcul, ceci ne serait guère envisageable en pratique si, comme dans [3], nous ne faisons quelques concessions. D'abord, les paramètres utilisés pour l'égalisation (nombre de coefficients et critère d'arrêt de l'algorithme du gradient) sont bien moins favorables que ceux du chapitre précédent. Ceci permet en effet de restreindre le temps consacré à l'égalisation, pour chaque réalisation. Signalons que nous avons effectué d'autres tests qui laissent penser que le pourcentage de fausses détections peut être significativement réduit à condition de s'accorder davantage de temps de calcul. Ensuite, nous choisissons comme dans [3] la stratégie suivante : la subdivision de l'intervalle de recherche sur laquelle nous effectuons notre recherche exhaustive est dense autour de la vraie valeur du paramètre, moins dense ailleurs. Naturellement, cette approche contribue à diminuer le nombre de fausses détections observées, en comparaison au cas où la grille considérée est de même densité partout (grille à pas constant). Afin de nous faire une idée de l'avantage factice occasionné par une subdivision plus dense dans le voisinage de la valeur recherchée, nous comparons, dans un contexte particulier, la différence de performance liée à l'emploi de l'une ou l'autre de ces grilles de recherche. Il s'avère malheureusement que, dans les contextes défavorables à la méthode proposée (CPM à faible excès de bande, rapport signal sur bruit défavorable), la différence entre le nombre de fausses détections observées respectivement dans le cas d'une grille à pas constant et dans le cas d'une grille dont la densité varie est significative. Considérons donc les deux grilles de recherche suivantes, incluses dans l'intervalle de recherche  $[\frac{\overline{T_s}}{2}, \frac{2\overline{T_s}}{3}]$ . La première grille considérée (grille n°1) possède un pas constant égal à  $10^{-4}$ . La seconde (grille n°2) possède un pas de  $5 \cdot 10^{-4}$  dans le voisinage de  $\overline{T_s}$ , et un pas de  $10^{-2}$  dans le reste de l'intervalle de recherche. Lorsque  $E_b/N_0 = 15dB$  et lorsque la modulation émise est une modulation 3RC d'indice 0.7, on observe 18% de fausses détections pour la grille dont le pas est constant. Si l'on utilise la seconde grille, dont la densité est non uniforme, ce pourcentage chute à 8%. Par conséquent, l'utilisation de la grille n°2 ne semble pas légitime dans un tel contexte de simulation. Malgré cela, nous n'avons guère d'autres choix que d'utiliser une grille non uniformément dense. Nous ne pouvons donc pas prétendre

que les pourcentages de fausses détections que nous présentons ci-après correspondent aux performances intrinsèques de la méthode. Toutefois, les résultats de simulation présentés permettent d'évaluer l'influence de certains paramètres.

Considérons d'abord le cas où une modulation 3RC d'indice  $h = 0.7$  est émise. La grille de recherche exhaustive utilisée est la grille n°2. Rappelons que la fréquence de coupure du filtre passe-bas de réception est fixée à  $F_R = 0.6/\overline{T_s}$ . Nous observons que le pourcentage de fausses détections est égal à 8% lorsque  $E_b/N_0 = 15\text{dB}$ , et à 16% lorsque  $E_b/N_0 = 10\text{dB}$ . En revanche, il est intéressant de noter que le pourcentage de fausses détections n'excède pas 3% à 10dB lorsque la modulation émise est de type 1REC. Cette observation permet de confirmer que la méthode proposée, comme la méthode cyclique, fournit des performances d'autant meilleures que la modulation CPM considérée a un excès de bande important.

Nous savons d'après les paragraphes précédents que la présence d'un filtre de réception passe-bas est nécessaire au fonctionnement de la méthode. On peut donc se demander quelle est l'influence de la fréquence de coupure de ce filtre sur les performances de la méthode. Nous considérons à nouveau le cas où une modulation 3RC d'indice 0.7 est émise et où  $E_b/N_0 = 15\text{dB}$ . Dans ce cas, nous observons que si l'on fait varier  $F_R$  dans l'intervalle  $[\frac{1}{2\overline{T_s}}, \frac{1}{\overline{T_s}}]$ , les performances de la méthode varient peu : le pourcentage de fausses détections est égal à 8% lorsque  $F_R = 0.6/\overline{T_s}$  contre 8.3% lorsque  $F_R = 0.9/\overline{T_s}$ .

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous montrons comment l'estimateur de la période symbole proposé dans [3] dans le cas de modulations linéaires peut être adapté au cas de signaux CPM. La méthode repose sur l'hypothèse essentielle qu'un filtrage passe-bas a eu lieu à l'émission ou à la réception. Dans ce cas, un filtre égaliseur numérique ne peut donner un signal de module constant en sortie que lorsque la période d'échantillonnage correspond à la période symbole. Cette approche, bien que coûteuse en complexité, permet de réduire le nombre de fausses détections dont souffrent les méthodes cycliques lorsque l'excès de bande du signal modulé est faible.

---

## Chapitre 5

# Estimation aveugle de l'indice de modulation

L'estimation aveugle des paramètres techniques de la modulation CPM émise est un problème crucial dans un bon nombre d'applications militaires ou civiles. Le contrôle de spectre est un exemple d'application civile pour laquelle les paramètres des émetteurs doivent être contrôlés. Dans le domaine militaire, et plus précisément dans le contexte de l'écoute passive, les paramètres techniques doivent être estimés afin d'identifier l'émetteur d'une part, et afin de récupérer les symboles d'information d'autre part. En effet, l'utilisation des démodulateurs présentés au chapitre 2 nécessite la connaissance préalable d'un certain nombre de paramètres, à commencer par l'indice de la modulation  $h$ .

### 5.1 Problématique et plan du chapitre

Dans ce chapitre, nous supposons que l'étape d'égalisation du signal reçu a été effectuée et nous étudions le problème de l'estimation aveugle de l'indice de modulation  $h$ . Cette hypothèse est justifiée par le fait que l'égalisation aveugle par l'algorithme du module constant (CMA) ne nécessite pas la connaissance de  $h$ . Étant donné les résultats satisfaisants du CMA, on peut donc considérer que l'étape d'égalisation s'est déroulée avec succès, et donc que l'on dispose d'une version bruitée et échantillonnée du signal émis.

**Remarque 5.1 :** *Contrairement au CMA, la plupart des techniques d'égalisation aveugle mentionnées au chapitre 3 nécessitent une bonne connaissance de  $h$ . L'utilisation de ces méthodes requiert donc la mise en œuvre d'un estimateur de  $h$  pouvant fonctionner avant l'égalisation. Malheureusement, estimer l'indice sans compenser au préalable l'effet du canal multi-trajets reste une tâche problématique. Parmi les méthodes d'estimation de  $h$  qui seront présentées plus loin, certaines peuvent certes être adaptées au cas où le canal de transmission n'a pas été compensé, mais il en résulte une augmentation dissuasive du coût de calcul ou une chute des performances. En pratique, il semble donc raisonnable d'appliquer un CMA au signal reçu en premier lieu et d'estimer ensuite les paramètres nécessaires, quitte à utiliser par la suite une autre procédure parmi celles présentées au chapitre 3 pour affiner l'égalisation.*

De nombreux travaux ont été consacrés à l'estimation aveugle des paramètres de synchronisation des signaux CPM (c.f. [35], [36] ou [5]). En comparaison, l'estimation de

l'indice de modulation demeure un problème bien moins classique et n'a fait l'objet que d'un très petit nombre de publications [37], [38]. Les procédures proposées dans [37] et [38] reposent sur une estimation des statistiques d'ordre supérieur du signal reçu, et fonctionnent uniquement dans le cas de CPM à réponse complète ( $L = 1$ ). Nous mentionnons également que ces techniques requièrent la connaissance préalable des paramètres de synchronisation, à savoir le retard à l'arrivée, le déphasage initial et le résidu de porteuse.

Nous proposons ici une nouvelle approche pour réaliser l'estimation aveugle de l'indice de modulation et nous analysons les performances de cet estimateur. Puisque notre travail se situe dans le contexte de l'écoute passive, nous devons mettre en œuvre une procédure qui puisse fonctionner sans aucune information *a priori* sur le type de modulation utilisé par l'émetteur. Ainsi, nous supposons que

1. les symboles d'information  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sont inconnus ;
2. le filtre de mise en forme  $g_a(t)$  est inconnu.

Dans ce chapitre, nous supposons en revanche que la période symbole  $T_s$  et le résidu de porteuse  $\delta f_0$  sont disponibles, pour des raisons de simplicité. Néanmoins, l'approche que nous présentons ici peut être adaptée au cas où ces paramètres sont inconnus : au chapitre (5.4.3), une procédure d'estimation conjointe de l'indice de modulation  $h$ , de la période symbole  $T_s$  et du résidu de porteuse  $\delta f_0$  est présentée. Comme l'analyse de performances de cet estimateur conjoint est loin d'être une simple généralisation du cas où  $T_s$  et  $\delta f_0$  sont connus, nous traitons séparément ces deux cas.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. En premier lieu, nous décrivons le modèle de signal utilisé au paragraphe 5.2. Nous passons ensuite en revue les estimateurs existants au paragraphe 5.3, afin notamment de justifier la mise en œuvre de notre estimateur. Nous étudions d'abord l'estimation de l'indice au sens du maximum de vraisemblance. Puisque le filtre de mise en forme est inconnu, il est nécessaire d'estimer conjointement l'indice et une séquence de coefficients qui dépendent du filtre de mise en forme. L'algorithme EM ([39], [14]) peut être utilisé à cette fin. Toutefois, chaque itération de cet algorithme requiert de maximiser une fonction non convexe de plusieurs variables. L'algorithme EM doit donc être correctement initialisé. De plus, nous verrons qu'à chaque itération, le nombre d'opérations effectuées est proportionnel au carré de la durée d'observation, ce qui rend l'algorithme EM difficilement implémentable en pratique. Il est donc pertinent de proposer des estimateurs sous optimaux. Par conséquent, nous présentons brièvement l'estimateur proposé dans [37]. Malheureusement, cet estimateur n'est susceptible de fonctionner que dans le cas de signaux CPM à réponse complète.

La procédure d'estimation que nous proposons est présentée au paragraphe 5.4. Elle est fondée sur l'observation que l'inverse de l'indice,  $1/h$ , est la plus petite puissance positive à laquelle un signal CPM doit être élevé pour qu'apparaissent des composantes sinusoïdales. Cette propriété est une conséquence directe d'une étude récente [25] des propriétés cycliques des signaux CPM.

Au paragraphe 5.5, nous étudions les performances asymptotiques de l'estimateur proposé. Nous montrons en particulier que l'erreur quadratique moyenne est asymptotiquement proportionnelle à  $1/N^2$ , où  $N$  est le nombre de périodes symboles observées. Notons que cette vitesse de convergence est plus élevée que pour la plupart des estimateurs standards. En outre, le comportement asymptotique de l'estimateur proposé est tout à fait particulier : nous montrons que l'erreur d'estimation converge en distribution vers une

variable aléatoire non gaussienne, construite à partir d'un mouvement Brownien. Il est important de noter que l'implémentation de la méthode proposée nécessite d'élever le signal à des puissances non entières. La phase du signal reçu doit donc être *déployée* grâce à une procédure qui, en présence de bruit, est susceptible de produire des erreurs. Bien que les résultats asymptotiques restent exacts en l'absence de bruit, l'étude du cas bruité nécessite de négliger les erreurs de déploiement de phase.

Les distributions théoriques et empiriques sont comparées au paragraphe 5.6. Comme auparavant, deux classes de signaux CPM (LREC et LRC) sont considérées dans les simulations. Nous étudions en particulier les valeurs du rapport signal sur bruit pour lesquelles l'étude asymptotique permet de prédire le comportement de l'estimateur. Enfin, nous comparons les performances de l'estimateur proposé avec celles de l'estimateur de [37], fondé sur les statistiques d'ordre supérieur, dans le cas de CPM à réponse complète.

## 5.2 Modèle de signal

Pour des raisons de simplicité, nous supposons être en présence d'un canal mono trajet<sup>1</sup> (flat fading) : ceci permet de séparer clairement l'estimation de l'indice de l'étape d'égalisation, et de présenter des résultats indépendants de la réalisation du canal et de l'égaliseur.

Comme nous l'avons expliqué plus haut, nous supposons également que la période symbole  $T_s$  et le résidu de porteuse  $\delta f_0$  sont connus du récepteur. Cette hypothèse est notamment justifiée par le fait que ces paramètres peuvent être estimés *avant* l'indice de modulation. Quoiqu'il en soit, nous verrons au chapitre 5.4.3 comment il est possible d'estimer conjointement l'indice de modulation, la période symbole et le résidu de porteuse.

Grâce à ces hypothèses, nous pouvons supposer que le résidu de porteuse a été parfaitement compensé au niveau du signal reçu. Autrement dit, nous pouvons le considérer comme nul dans la suite. Ainsi, le signal reçu peut s'écrire comme un signal CPM retardé, pondéré par un gain complexe, et distordu par un bruit complexe blanc additif gaussien  $b_a(t)$  de variance  $\sigma^2$ . Le bruit est supposé blanc dans la bande du filtre de réception. On désigne par  $N_0$  sa densité spectrale. Le signal reçu  $y_a(t)$  peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$y_a(t) = \alpha s_a(t - \tau) + b_a(t). \quad (5.1)$$

Le paramètre  $\tau$  représente le retard à l'arrivée et est supposé inconnu. Le facteur  $\alpha$  représente un gain complexe, lui aussi inconnu. Remarquons que, dans l'équation (5.1), il est implicitement supposé que le filtre de réception ne produit pas de distortion sur le signal modulé.

Le signal reçu est observé pendant une durée  $T_{obs}$  correspondant à l'émission de  $N$  symboles, *i.e.*  $T_{obs} = NT_s$ . Ensuite, ce signal est échantillonné à la période  $T_e = T_s/M$ , où  $M$  est un entier. Par commodité, nous supposons que le retard  $\tau$  est tel que  $0 \leq T_s - \tau < \frac{T_s}{M}$ . Pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots, NM-1$ , on désigne par  $y(k)$ ,  $s(k)$ ,  $b(k)$  les signaux à temps discret définis par  $y(k) = y_a(T_s + kT_s/M)$ ,  $s(k) = s_a(kT_s/M + T_s - \tau)$  et  $b(k) = b_a(T_s + kT_s/M)$  respectivement. L'égalité (5.1) conduit à :

$$y(k) = \alpha s(k) + b(k). \quad (5.2)$$

<sup>1</sup>Dans le cas d'un canal multi-trajets, faire une telle hypothèse revient à considérer que *i)* une fois la procédure d'égalisation accomplie, les effets successifs du canal et de l'égaliseur sont équivalents à celui d'un filtre interpolateur, et *ii)* que le bruit additif filtré par l'égaliseur est assimilable à un bruit blanc.

Dans ce chapitre, on définit la séquence  $(\psi(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  par  $\psi(k) = \psi_a(kT_s/M + T_s - \tau)$ . Puisque  $nT_s \leq nT_s + mT_s/M + T_s - \tau \leq (n+1)T_s$  pour tout  $n \geq 0$  et pour tout  $m = 0, \dots, M-1$ , on obtient grâce à (2.4) que pour tout  $n \geq 0$  et pour tout  $m = 0, \dots, M-1$ ,

$$\psi(nM + m) = \pi h \left( \sum_{j=-\infty}^{n-L} a_j + \sum_{j=0}^{L-1} a_{n-j} \phi_{j,m} \right), \quad (5.3)$$

où  $\phi_{j,m}$  est défini par  $\phi_{j,m} = \phi_a(jT_s + mT_s/M + T_s - \tau)$ .

**Remarque 5.2 :** L'hypothèse  $0 \leq T_s - \tau < \frac{T_s}{M}$  est justifiée par l'expression (5.3). Si, au contraire,  $\frac{k_0 T_s}{M} \leq T_s - \tau < \frac{(k_0+1)T_s}{M}$  pour  $1 \leq k_0 \leq (M-1)$ , il faudrait remplacer  $\psi(nM + m)$  par  $\psi(nM + m - k_0)$  dans l'équation (5.3). Ceci compliquerait les notations des paragraphes suivants sans pour autant modifier les résultats.

## 5.3 Revue des estimateurs existants

### 5.3.1 Estimation par le critère du maximum de vraisemblance

Maximiser la vraisemblance  $p(y(0) \dots y(NM-1)/h)$  par rapport à  $h$  semble être l'approche la plus naturelle pour estimer l'indice de modulation  $h$ . Néanmoins, l'utilisation du critère du maximum de vraisemblance donne lieu à un certain nombre de difficultés dans le contexte qui est le nôtre.

Il est important de garder à l'esprit que l'objectif de ce paragraphe n'est pas tant d'étudier dans le détail l'estimation au sens du maximum de vraisemblance que de souligner les problèmes qu'il pose. Nous faisons donc les hypothèses suivantes afin de simplifier les notations. Nous supposons dans ce paragraphe que le signal reçu est échantillonné à la période symbole  $T_s$  i.e.  $M = 1$ . Nous considérons en outre que  $b(k) = b_a(kT_s)$  est une séquence i.i.d. En utilisant (5.2) et (5.3), on peut écrire les échantillons du signal reçu de la manière suivante pour tout  $n \geq 0$  :

$$y(n) = |\alpha| \exp i \left( \pi h \sum_{j=-L+1}^{n-L} a_j + \pi h \sum_{j=0}^{L-1} \phi_j a_{n-j} + \Phi \right) + b(n), \quad (5.4)$$

où  $\phi_k = \phi_a(kT_s + T_s - \tau)$  et où  $\Phi$  représente la phase  $\Phi = \pi h \sum_{j=-\infty}^{-L} a_j + \text{Arg}(\alpha)$  qui est bien entendu inconnue. Pour simplifier ce qui suit, nous supposons que la variance du bruit  $\sigma^2$  est connue. On peut toutefois étendre la procédure décrite ici au cas où  $\sigma^2$  est inconnue sans grande difficulté. On peut alors également supposer que le gain réel  $|\alpha|$  est égal à un, sans que cela suppose davantage de restriction. Puisque le paramètre  $\Phi$  et les coefficients  $(\phi_k)_{k=0, \dots, L-1}$  sont inconnus, l'estimation de  $h$  au sens du maximum de vraisemblance revient à estimer conjointement  $h$ ,  $\Phi$  et  $(\phi_k)_{k=0, \dots, L-1}$  par le critère du maximum de vraisemblance. Nous considérons donc le vecteur de paramètres à estimer  $\boldsymbol{\theta} = (h, \Phi, \phi_0, \dots, \phi_{L-1})^T$  et nous désignons par  $\mathbf{y}$  le vecteur constitué par l'ensemble des échantillons reçus  $\mathbf{y} = (y(0), \dots, y(N-1))^T$ .  $\mathbf{y}$  est traditionnellement appelé le vecteur des *données incomplètes*. La fonction  $p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta})$  correspond à la vraisemblance des données complètes.

Puisqu'aucune information sur les symboles émis n'est disponible, l'évaluation de  $p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta})$  pour une valeur donnée de  $\boldsymbol{\theta}$  requiert de l'ordre de  $2^N$  opérations. Il n'est donc pas envisageable de maximiser directement  $\boldsymbol{\theta} \rightarrow p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta})$ . L'algorithme EM (Expectation Maximization, [14]) peut à nouveau être employé afin de maximiser  $p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta})$  par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$ .

Pour une valeur donnée de  $\boldsymbol{\theta}$ , l'expression (5.4) permet d'observer que pour tout  $n$ ,  $y(n)$  dépend uniquement de la variable aléatoire vectorielle  $\mathbf{z}(n) = (z_1(n), a_{n-L+1}, \dots, a_n)^T$ , où  $z_1(n) = \sum_{k=-L+1}^{n-L} a_k$ . La séquence  $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}(0), \dots, \mathbf{z}(N-1))^T$  représente les *données cachées*. Bien que nous ayons déjà rencontré l'algorithme EM au cours des chapitres précédents, nous rappelons ici son principe pour une meilleure lisibilité. L'algorithme EM génère une séquence  $(\boldsymbol{\theta}^{(k)})_{k \geq 1}$  qui converge vers un maximum local ou global de la fonction de vraisemblance  $\boldsymbol{\theta} \rightarrow p(\mathbf{y}/\boldsymbol{\theta})$ . À l'étape  $(k+1)$ , l'estimée  $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$  est définie par  $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ , où

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = E \left( \log p(\mathbf{y}, \mathbf{Z}/\boldsymbol{\theta}) / \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right). \quad (5.5)$$

À chaque itération, la fonction  $\boldsymbol{\theta} \rightarrow Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$  doit être évaluée, puis maximisée par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$ . Il est intéressant de montrer comment la fonction  $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$  peut être évaluée, notamment afin d'analyser la complexité de la méthode.

- Pour une valeur donnée  $\boldsymbol{\theta} = (h, \Phi, \phi_0, \dots, \phi_{L-1})^T$ , (5.4) peut être écrit ainsi :

$$y(n) = F_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}(n)) + b(n),$$

où  $F_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}(n))$  est l'application définie par

$$F_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}(n)) = \exp \left( i\pi h z_1(n) + i\pi h \sum_{k=0}^{L-1} \phi_k a_{n-k} + i\Phi \right);$$

- Pour tout  $n = 0 \dots N-1$ , la première composante  $z_1(n)$  de  $\mathbf{z}(n)$  est telle que  $-n \leq z_1(n) \leq n$ . De plus,  $z_1(n)$  est pair (resp. impair) si et seulement si  $n$  est pair (resp. impair). Comme les  $L$  dernières composantes  $(a_{n-L+1}, \dots, a_n)$  de  $\mathbf{z}(n)$  prennent leur valeurs dans l'ensemble  $\{-1, +1\}$ , le vecteur  $\mathbf{z}(n)$  appartient finalement à un ensemble  $\mathcal{Z}_n$  qui contient  $2^L(n+1)$  valeurs.

On peut alors montrer après quelques calculs classiques, que  $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$  correspond au minimum de la fonction  $R(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$  définie par :

$$R(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_n} |y(n) - F_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z})|^2 P(\mathbf{z}(n) = \mathbf{z}/\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(k)}) \quad (5.6)$$

où  $\mathbf{z} \rightarrow P(\mathbf{z}(n) = \mathbf{z}/\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$  représente la probabilité conditionnelle de  $\mathbf{z}(n)$  sachant  $\mathbf{y}$  et sachant la valeur du paramètre  $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$  obtenu à l'issue de la  $k^{\text{ième}}$  itération. L'évaluation de  $R(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$  passe donc par le calcul préalable des probabilités conditionnelles de  $\mathbf{z}(n)$  sachant  $\mathbf{y}$  et  $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ , pour tout  $n = 0 \dots N-1$ . Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, l'algorithme *forward-backward* ([14]) peut être utilisé à cette fin. En utilisant le fait que  $\mathcal{Z}_n$  contient  $2^L(n+1)$  valeurs pour tout  $n$ , on peut montrer que l'algorithme *forward-backward* requiert de l'ordre de  $9 \frac{N(N+1)}{2} 2^L$  opérations. En outre, le maximum de la fonction  $\boldsymbol{\theta} \rightarrow R(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$  ne peut être exprimé analytiquement. Il est donc nécessaire de mettre en œuvre une méthode itérative telle qu'un algorithme du gradient afin d'estimer l'argument du maximum de  $R(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ . Une telle méthode demande  $O(N^2)$  opérations à chaque itération. En effet, si l'on considère l'exemple de l'algorithme du gradient, on s'aperçoit que chaque composante du gradient a une forme similaire à (5.6) : l'évaluation de chaque composante du gradient requiert donc environ  $2^L N(N+1)/2$  opérations.

Enfin, nous soulignons le fait que  $\boldsymbol{\theta} \rightarrow R(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(k)})$  n'est pas une fonction convexe. Des algorithmes complexes doivent donc être utilisés afin de maximiser cette fonction, dès lors qu'aucune estimée initiale suffisamment fine n'est disponible.

L'ensemble des remarques ci-dessus implique que l'estimation de  $h$  par le critère du maximum de vraisemblance ne semble pas être adaptée à une implémentation pratique, même en utilisant l'algorithme EM. Il est donc pertinent de proposer des estimateurs sous optimaux.

### 5.3.2 Estimation basée sur les statistiques d'ordre supérieur

Nous présentons brièvement l'estimateur proposé dans [37]. Comme nous l'avons mentionné au début de ce chapitre, cette approche ne peut être utilisée que dans le cas de signaux CPM à réponse complète. Par conséquent, nous supposons que  $L = 1$  tout au long de ce paragraphe. Bien que la méthode de [37] puisse être adaptée au cas d'un sur-échantillonnage ( $M > 1$ ) (c.f. [38]), nous supposons en outre que  $M = 1$ , c'est à dire que le signal reçu est échantillonné à la période symbole  $T_s$ . En conservant les notations du paragraphe précédent, on peut écrire le signal reçu  $y(n)$  de la manière suivante :

$$y(n) = |\alpha| \exp i \left( \pi h \sum_{j=-1}^{n-1} a_j + \pi h \phi_0 a_n + \Phi \right) + b(n), \quad (5.7)$$

où  $\phi_0 = \phi_a(T_s - \tau)$ . La méthode proposée dans [37] repose sur l'hypothèse fondamentale que le récepteur est **parfaitement synchronisé**. Autrement dit, nous devons supposer dans ce paragraphe que le retard à l'arrivée  $\tau$  est égal à  $T_s$  et donc que le paramètre  $\phi_0$  est égal à  $\phi_a(T_s) = 1$ .

L'estimateur de [37] est basé sur l'observation que le quotient des cumulants

$$\frac{\text{cum}(y(n+1), y(n)^*, y(n), y(n)^*)}{\text{cum}(y(n), y(n)^*, y(n), y(n)^*)} \quad (5.8)$$

est égal à  $\cos \pi h$ . L'estimée de  $h$  correspond alors à la valeur  $\frac{1}{\pi} \arccos(\hat{d})$ , où  $\hat{d}$  représente une estimée de (5.8). Les performances asymptotiques de cet estimateur ont été étudiées dans [37]. Il a été démontré que l'estimée est asymptotiquement gaussienne et converge vers  $h$  à la vitesse  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ , et que sa variance converge vers 0 lorsque la variance du bruit tend vers 0.

## 5.4 Estimateur proposé

### 5.4.1 Une propriété cyclique des signaux CPM

L'estimateur proposé est basé sur une propriété cyclique des signaux CPM qui est une conséquence directe des résultats de [25].

**Proposition 5.1 :** *Soit  $r_a(t)$  un signal CPM d'indice  $f$ . Alors,*

- *Si  $f$  est non entier, alors  $E(r_a(t)) = 0$  pour tout  $t$  ;*
- *Si  $f$  est un entier pair, la fonction  $t \rightarrow E(r_a(t))$  est périodique de période  $T_s$  ;*
- *Si  $f$  est un entier impair, la fonction  $t \rightarrow E(r_a(t))$  est périodique de période  $2T_s$ .*

Nous considérons maintenant le signal CPM  $s_a(t)$  défini par (2.1) et nous appelons  $h$  l'indice de la modulation. Afin d'introduire l'estimateur en question, nous devons au préalable définir le signal  $s_a(t)^g$  pour tout réel positif  $g$ . Ceci nécessite un minimum de précautions. En effet, si l'on dispose du signal  $s_a(t)$ , alors à  $t$  donné, l'argument de  $s_a(t)$  est connu modulo  $2\pi$ . Donc, en écrivant

$$s_a(t)^g = |s_a(t)|^g \exp(ig \operatorname{Arg}(s_a(t))), \quad (5.9)$$

il nous faut préciser quelle détermination particulière de  $\operatorname{Arg}(s_a(t))$  est choisie. Nous choisissons ici la détermination

$$\operatorname{Arg}(s_a(t)) = \psi_a(t), \quad (5.10)$$

où  $\psi_a(t)$  est définie par (2.3). (5.10) peut être interprétée comme la détermination pour laquelle la fonction  $t \rightarrow \operatorname{Arg}(s_a(t))$  est continue. En injectant (5.10) dans la définition (5.9), il apparaît clairement que  $s_a(t)^g$  peut être vu comme un signal CPM d'indice  $gh$ .

Le résultat suivant, démontré en annexe, est un corollaire de la proposition 5.1.

**Proposition 5.2 :** *Un nombre réel  $g$  vérifie*

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S s_a(t)^g e^{-2i\pi \frac{t}{2T_s}} dt \neq 0 \quad (5.11)$$

seulement si  $g$  est un multiple impair de  $g_0 = \frac{1}{h}$ .

#### 5.4.2 Estimateur proposé

Dans ce paragraphe, nous voyons comment utiliser la Proposition 5.2 afin d'estimer  $g_0 = \frac{1}{h}$ , à partir du signal temps discret  $(y(k))_{k=0, \dots, MN-1}$  défini par (5.2). Grâce aux Propositions 5.1 et 5.2, on obtient immédiatement que  $g_0$  est le plus petit réel positif pour lequel

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{MN-1} s(kT_s)^{g_0} e^{-i\pi \frac{k}{M}} \neq 0. \quad (5.12)$$

Rappelons que la suite  $(s(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  est ici définie pour tout  $k$  par  $s(k) = s_a(kT_s/M + T_s - \tau)$ . Le signal  $(y(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  étant une version bruitée  $(s(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ , la propriété (5.12) suggère d'estimer  $g_0 = \frac{1}{h}$  de la manière suivante. Soit  $r_N(g)$  la fonction définie pour tout  $g > 0$  par :

$$r_N(g) = \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{NM-1} \left( \frac{y(k)}{|y(k)|} \right)^g e^{-i\pi \frac{k}{M}}. \quad (5.13)$$

En l'absence de bruit,  $r_N(g)$  converge vers zéro dès que  $g$  n'est pas un multiple impair de  $g_0$ . Nous proposons par conséquent d'estimer  $g_0$  en maximisant le critère

$$J_N(g) = |r_N(g)|^2 \quad (5.14)$$

par rapport à  $g$ , et sur un intervalle  $[g_{min}, g_{max}]$ . L'estimée correspondante de  $g_0$  est notée  $\hat{g}_N$ . L'estimée  $\hat{h}_N$  de l'indice de modulation  $h$  est naturellement définie comme l'inverse de la précédente  $\hat{h}_N = \frac{1}{\hat{g}_N}$ .

Afin d'éviter toute ambiguïté, l'intervalle de recherche  $[g_{min}, g_{max}]$  doit être choisi de telle sorte que

- $\frac{1}{h}$  appartienne à cet intervalle :  $\frac{1}{h} \in [g_{min}, g_{max}]$  ;

- $\frac{1}{h}$  soit lui-même le seul multiple impair de  $\frac{1}{h}$  dans cet intervalle, ce qui s'écrit :

$$\frac{3}{h} > g_{max}.$$

En effet, lorsque  $N$  tend vers l'infini, le maximum de la fonction  $J_N(g)$  est atteint quand  $g$  coïncide avec un multiple impair de  $\frac{1}{h}$  : des ambiguïtés peuvent alors apparaître si l'intervalle de recherche contient plusieurs multiples entiers de  $\frac{1}{h}$ . La définition pratique d'un intervalle  $[g_{min}, g_{max}]$  qui vérifie les contraintes ci-dessus, semble délicate à première vue étant donné que l'indice de modulation  $h$  est inconnu du récepteur. Il est toutefois raisonnable de considérer qu'une information *a priori* sur les valeurs possibles de  $h$  est disponible et que cette information suffit à déterminer un intervalle de recherche satisfaisant. Par exemple, si l'on sait *a priori* que  $h$  appartient à un certain intervalle  $[h_{min}, h_{max}]$  tel que  $h_{max} < 3h_{min}$ , alors on peut en déduire un intervalle de recherche qui permet d'éviter les ambiguïtés : en effet, chaque élément  $h$  de  $[h_{min}, h_{max}]$  est tel que  $\frac{1}{h} \in [\frac{1}{h_{max}}, \frac{1}{h_{min}}]$  et  $\frac{3}{h} > \frac{1}{h_{min}}$ . Donc l'intervalle  $[\frac{1}{h_{max}}, \frac{1}{h_{min}}]$  ne contient aucun multiple impair de l'inverse de l'indice. L'intervalle  $[h_{min}, h_{max}] = [0.3, 0.9]$  contient la plupart des valeurs d'indice possibles dans la majeure partie des systèmes de communications utilisant des CPM, et satisfait la condition ci-dessus.

#### ■ Pourquoi utiliser la suite $(\frac{y(k)}{|y(k)|})_{k \in \mathbb{Z}}$ dans (5.13) ?

On pourrait aussi bien remplacer la suite  $(\frac{y(k)}{|y(k)|})_{k \in \mathbb{Z}}$  par  $(y(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  dans la définition (5.13). Dans le cas non bruité, le quotient  $\frac{y(k)}{|y(k)|}$  est bien entendu égal à  $y(k)$  à un facteur constant près. En revanche, en présence de bruit, l'utilisation de (5.13) permet d'une certaine manière de s'affranchir de la contribution du bruit au module du signal reçu, et conduit à de meilleurs résultats expérimentaux. Cette observation pourrait être confirmée théoriquement en comparant les performances asymptotiques obtenues à partir des deux définitions possibles de  $r_N(g)$ . Nous n'avons pas jugé utile de présenter ici ces deux études asymptotiques.

#### ■ Implémentation

La fonction  $g \rightarrow J_N(g)$  n'est pas convexe. Nous proposons donc de calculer  $J_N(g)$  sur une grille de valeurs incluse dans l'intervalle de recherche, puis d'initialiser un algorithme de Newton avec l'argument du maximum de  $J_N(g)$  sur cette grille, afin d'affiner l'estimation.

#### ■ Calcul pratique de la suite $(y(k)^g)_{k \in \mathbb{Z}}$ à partir de $(y(k))_{k \in \mathbb{Z}}$

Le principal problème de l'estimateur proposé provient du calcul pratique de  $y(k)^g$  pour tout  $k$  et pour tout  $g$  de l'intervalle de recherche. Cette étape cruciale nécessite en effet de *déployer* la phase de  $(y(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  de manière adéquate. Autrement dit, pour tout  $k = 0, \dots, NM - 1$ , la bonne détermination de  $\text{Arg}(y(k))$  doit être choisie afin de pouvoir calculer  $y(k)^g = |y(k)| \exp(ig \text{Arg}(y(k)))$ . Commençons par traiter le cas non bruité, pour lequel  $y(k)$  coïncide avec  $\alpha s(k)$ . Afin d'obtenir une estimation consistante de  $g_0$ , il nous faut sélectionner pour tout entier  $k$  la détermination définie par  $\text{Arg}(y(k)) = \text{Arg}(\alpha) + \psi(k)$ . En l'absence de bruit, cette détermination particulière de  $\text{Arg}(y(k))$  peut toujours être sélectionnée sans erreur parmi toutes les déterminations possibles. En effet, en utilisant l'équation (5.3) et le fait que les coefficients  $(\phi_{j,m})_{j,m}$  appartiennent à l'intervalle  $[0, 1]$ , on constate que la variation de phase  $\psi(k) - \psi(k - 1)$  entre deux échantillons consécutifs

est telle que  $\psi(k) - \psi(k-1) < \pi h$  quel que soit  $k$ . Si  $h$  vérifie  $h < 1$ , c'est le cas dans la plupart des contextes, alors  $\psi(k) - \psi(k-1)$  est strictement inférieur à  $\pi$ . Grâce à cette remarque, on peut aisément vérifier que la procédure récursive suivante permet de choisir la détermination correcte  $\text{Arg}(y(k)) = \text{Arg}(\alpha) + \psi(k)$  pour tout  $k$  :

Supposons que la détermination de  $\text{Arg}(y(k-1))$  a été correctement identifiée à l'étape  $k-1$ . Alors  $\text{Arg}(y(k))$  est définie comme la détermination pour laquelle  $|\text{Arg}(y(k)) - \text{Arg}(y(k-1))|$  est minimum.

Remarquons que dans le cas moins classique où  $h > 1$ , l'inégalité  $\psi(k) - \psi(k-1) < \pi$  reste vraie dès lors que le facteur de suréchantillonnage  $M$  est suffisamment grand. La bonne détermination de  $\text{Arg}(y(k))$  peut donc être choisie sans erreur, toujours grâce à la même procédure. En présence de bruit, la même procédure est utilisée. Toutefois, l'influence du bruit additif  $b(k)$  peut provoquer des *erreurs de déploiement de phase*. Les résultats expérimentaux du paragraphe 5.6 illustrent l'effet de telles erreurs sur les performances de l'estimateur.

#### ■ Coût de calcul

L'évaluation de  $J_N(g) = |r_N(g)|^2$  requiert de l'ordre de  $N$  opérations pour tout  $g$ . Remarquons que l'étape de déploiement requiert environ  $N$  opérations, mais puisque cette procédure ne dépend que de la séquence  $(y(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ , il n'est pas nécessaire de la mettre en œuvre pour chaque valeur de  $g$ . Le coût de calcul de la recherche exhaustive en  $g$  est donc environ égal à  $N_g N + N$ , où  $N_g$  représente le nombre de points de la grille sur laquelle le critère  $J_N(g)$  est maximisé. Dans nos simulations, nous avons choisi  $N_g = N/10$  : dans ce cas, environ  $\frac{N^2}{10}$  opérations sont nécessaires à la recherche exhaustive. La complexité de la recherche fine par algorithme de Newton dépend du nombre d'itérations utilisées. Dans nos simulations, nous utilisons une dizaine d'itérations, ce qui implique une complexité de  $10N$  opérations pour l'ensemble de la recherche fine. Ce nombre peut être négligé devant le précédent. Bien que la procédure présentée ici soit évidemment plus complexe que l'estimateur de [37], elle reste moins exigeante en coût de calcul que l'algorithme EM. Nous rappelons en effet que ce dernier requiert environ  $4.5N^2 2^L$  opérations à chaque itération, sans compter la complexité de l'étape de maximisation de la fonction  $R$  définie par (5.6) et qui dépend de la méthode de maximisation utilisée. Dans tous les cas, cette étape demande également un nombre d'opérations proportionnel à  $N^2$ . Il est donc certain que la complexité de l'estimateur proposé est significativement plus faible que celle de l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance.

#### 5.4.3 Cas où la période symbole et le résidu de porteuse sont inconnus

L'estimateur de  $h$  qui vient d'être présenté fonctionne dans le cas où la période symbole  $T_s$  et le résidu de fréquence porteuse  $\delta f_0$  sont connus. L'annexe A montre comment adapter la méthode au cas où ces deux paramètres sont inconnus. Cet estimateur est étudié dans l'annexe A, et son comportement asymptotique y est caractérisé. Toutefois, pour des raisons de lisibilité du document, nous indiquons brièvement dans ce paragraphe le principe de la méthode.

Si le résidu de fréquence porteuse  $\delta f_0$  est non nul, le signal reçu  $y_a(t)$  peut s'écrire :

$$y_a(t) = \alpha s_a(t - \tau) e^{2i\pi\delta f_0 t} + b_a(t).$$

Pour simplifier, nous supposons ici que le bruit additif  $b_a(t)$  est nul ou négligeable. Grâce aux propositions 5.1 et 5.2, on peut vérifier que :

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S y_a(t)^g e^{-2i\pi\alpha t} dt \neq 0$$

si et seulement si

- $g$  est un multiple impair de  $\frac{1}{h}$  et  $\alpha = n\frac{1}{2T_s} + g\delta f_0$  pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ ,

ou

- $g$  est un multiple pair de  $\frac{1}{h}$  et  $\alpha = n\frac{1}{T_s} + g\delta f_0$  pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ .

Cette propriété peut être directement utilisée afin d'estimer  $h$  par le biais d'une recherche exhaustive selon  $(g, \alpha)$ . Cependant, la mise en œuvre d'un tel estimateur nécessite de disposer, au niveau du récepteur, d'une information *a priori* sur les valeurs susceptibles d'être prises par les trois paramètres inconnus, afin d'éviter toute ambiguïté. Plus précisément, le récepteur doit être à même de définir des intervalles de recherche  $I_g$  pour  $g$  et  $I_\alpha$  pour  $\alpha$ , tels que :

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S y_a(t)^g e^{-2i\pi\alpha t} dt \neq 0$$

pour  $g \in I_g$  et  $\alpha \in I_\alpha$  si et seulement si

$$g = g_0 = \frac{1}{h} \text{ et } \alpha = \alpha_0 = \frac{1}{2T_s} + \frac{f_0}{h} .$$

Dans ce cas, il est possible d'estimer conjointement  $g_0$  et  $\alpha_0$ , et donc le paramètre  $h$  lui-même. En pratique, les intervalles  $I_g$  et  $I_\alpha$  peuvent être définis à partir d'estimées initiales de  $\delta f_0$  et de  $T_s$ .

Une estimation grossière (mais qui peut être suffisante) du rythme symbole  $\frac{1}{T_s}$  peut être obtenue en détectant la largeur de bande du signal reçu. Une estimation plus fine peut être obtenue grâce aux méthodes basées sur la détection des fréquences cycliques du signal reçu, comme nous l'avons déjà évoqué. On peut enfin estimer grossièrement le résidu de fréquence porteuse  $\delta f_0$  en remarquant que  $\delta f_0$  correspond à la moyenne de la fréquence instantanée<sup>2</sup> de  $y_a(t)$ .

## 5.5 Analyse asymptotique de l'estimateur proposé

Dans ce paragraphe, nous supposons (sans que cela n'implique de restriction) que le paramètre  $\alpha$  est égal à 1 afin de simplifier les notations. Nous faisons également l'hypothèse que  $\exp(i\pi h \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j) = 1$ , afin que la phase  $\psi(nM + m)$  définie par (5.3) soit égale à  $\pi h \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j + \sum_{j=0}^{L-1} a_{n-j} \phi_{j,m} \right)$  modulo  $2\pi$  pour tout  $n \geq (L-1)$ . Nous insistons sur le fait que là encore, cette hypothèse n'implique aucune restriction pour l'analyse asymptotique qui suit. En effet,  $\pi h \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j$  peut être vu comme une phase initiale aléatoire qui n'a aucune influence sur la fonction de coût  $J_N(g)$  (et *a fortiori* sur le comportement asymptotique de l'estimée). Cette affirmation peut être démontrée en remarquant que pour tout  $g$ ,  $J_N(g)$  s'écrit également  $J_N(g) = \left| \exp \left( -i\pi h g \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j \right) r_N(g) \right|^2$ . En réinjectant (5.13) et (5.3) dans l'expression précédente, on conclut que  $J_N(g)$  ne dépend pas de la phase initiale.

<sup>2</sup>Le terme de *fréquence instantanée* d'un signal  $y_a(t)$  désigne ici la fonction  $\frac{\tilde{y}'_a(t)}{2i\pi\tilde{y}_a(t)}$ , où  $\tilde{y}_a(t) = \frac{y_a(t)}{|y_a(t)|}$

### 5.5.1 Le cas non bruité

Nous commençons par étudier la distribution asymptotique de l'estimée  $\hat{g}_N$  de  $g_0$ , en l'absence de bruit, et nous en déduisons celui de l'estimée  $\hat{h}_N$  de  $h$ .

Avant de présenter les résultats principaux de ce paragraphe, nous étudions d'abord le comportement asymptotique de  $r_N(g_0)$  afin de comprendre intuitivement quels sont les paramètres susceptibles d'influencer les performances de l'estimateur. En utilisant (5.13) et (5.31), et en remarquant que :

$$e^{-2i\pi \frac{nM+m}{2M}} = (-1)^n e^{-i\pi \frac{m}{M}},$$

on constate que  $r_N(g)$  a la forme suivante :

$$r_N(g) = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \exp[ig\psi(nM+m)] (-1)^n e^{-i\pi \frac{m}{M}}. \quad (5.15)$$

Nous évaluons maintenant l'expression ci-dessus au point  $g_0$ . On remarque avant tout que  $\exp\left[i\pi \sum_{j=0}^{n-L} a_j\right]$  coïncide avec  $\pm(-1)^n$ , disons par exemple

$$\exp\left[i\pi \sum_{j=0}^{n-L} a_j\right] = 1.$$

Puisque  $g_0 h = 1$ ,  $\exp[ig_0\psi(nM+m)]$  peut être écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \exp[ig_0\psi(nM+m)] &= (-1)^n \prod_{j=0}^{L-1} \exp[i\pi a_{n-j} \phi_{j,m}], \\ &= (-1)^n \prod_{j=0}^{L-1} (\cos(\pi \phi_{j,m}) + i a_{n-j} \sin(\pi \phi_{j,m})). \end{aligned} \quad (5.16)$$

En développant le membre de droite de (5.16), il apparaît clairement que

$$(-1)^n \exp ig_0\psi(nM+m)$$

coïncide avec la somme  $(\prod_{j=0}^{L-1} \cos(\pi \phi_{j,m})) + \epsilon(nM+m)$ , où  $\epsilon(nM+m)$  représente une variable aléatoire de moyenne nulle qui dépend seulement des symboles  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-L+1}$  et des coefficients  $(\phi_{j,m})_{j=0, \dots, L-1}$ . En réinjectant l'expression ci-dessus de  $(-1)^n \exp ig_0\psi(nM+m)$  dans (5.15), on obtient :

$$r_N(g_0) = \lambda + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\epsilon}(n), \quad (5.17)$$

où  $\tilde{\epsilon}(n)$  représente le processus à temps discret défini par  $\tilde{\epsilon}(n) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \epsilon(nM+m) e^{-i\pi \frac{m}{M}}$  et où  $\lambda$  est la constante déterministe définie par :

$$\lambda = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \prod_{j=0}^{L-1} \cos(\pi \phi_{j,m}) e^{-i\pi \frac{m}{M}}. \quad (5.18)$$

$(\tilde{\epsilon}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite stationnaire de moyenne nulle qui vérifie la loi forte des grands nombres :  $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\epsilon}(n)$  converge presque sûrement vers zéro quand  $N$  tend vers l'infini. Par conséquent, (5.17) permet de conclure que  $r_N(g_0)$  converge vers  $\lambda$ . Autrement dit, la constante  $|\lambda|^2$  peut être interprétée comme la valeur asymptotique de la fonction de coût  $J_N$  au point  $g_0$ . Ce résultat nous indique d'ores et déjà que le module  $|\lambda|$  de  $\lambda$  possède une influence déterminante sur les performances de l'estimateur proposé.

Nous désignons respectivement par  $\rho$  et  $\theta$  le module et l'argument de  $\lambda$  :  $\rho = |\lambda|$  et  $\theta = \text{Arg}(\lambda)$ . Il nous est également nécessaire d'introduire le processus stochastique  $(\bar{\epsilon}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  défini par

$$\bar{\epsilon}(n) = \frac{1}{\rho} i(\lambda \tilde{\epsilon}(n)^* - \lambda^* \tilde{\epsilon}(n)).$$

Afin d'étudier le comportement asymptotique de  $\hat{g}_N$ , nous remarquons avant tout que  $J'_N(\hat{g}_N)$  est égal à zéro. En utilisant le développement de Taylor de  $J'_N(\hat{g}_N)$  au point  $g_0$ , on peut conjecturer comme il est d'usage, que  $N(\hat{g}_N - g_0)$  et  $-\frac{J'_N(g_0)}{J''_N(g_0)/N}$  ont le même comportement asymptotique. Par conséquent, l'analyse asymptotique de l'estimateur peut être réalisée par le biais d'une étude séparée des comportements asymptotiques de  $J'_N(g_0)$  et  $J''_N(g_0)/N$ .

Les comportements asymptotiques de  $J'_N(g_0)$  et  $J''_N(g_0)$  sont donnés par les lemmes suivants, qui sont démontrés en annexe.

**Lemme 5.1 :** *La dérivée première  $J'_N(g_0)$  de  $J_N$  au point  $g_0$  s'écrit<sup>3</sup> :*

$$J'_N(g_0) = \pi h \rho \left( \mu + \left( \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\sum_{j=0}^{n-L} a_j)}{N^{3/2}} \right) \left( \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \bar{\epsilon}(n)}{N^{1/2}} \right) - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right) \bar{\epsilon}(n) \right) + O_P\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right) \quad (5.19)$$

où  $\mu$  est la constante déterministe définie par :

$$\mu = -\frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{j=0}^{L-1} \phi_{j,m} \sin(\pi \phi_{j,m}) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{L-1} \cos(\pi \phi_{k,m}) \right) \cos\left(\frac{\pi m}{M} + \theta\right). \quad (5.20)$$

**Lemme 5.2 :**  *$-\frac{J''_N(g_0)}{N}$  s'écrit :*

$$-\frac{J''_N(g_0)}{N} = 2\rho^2(\pi h)^2 \left( \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right)^2 - \frac{1}{N^3} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right)^2 \right) + O_P\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right). \quad (5.21)$$

Nous utilisons maintenant le *théorème central limite fonctionnel* ([40]) afin de caractériser le comportement asymptotique de l'erreur d'estimation  $N(\hat{g}_N - g_0)$ . Afin de présenter

<sup>3</sup>La notation  $O_P(\frac{1}{N^{1/2}})$  caractérise un terme qui, lorsqu'il est multiplié par  $N^{1/2}$ , reste borné en probabilité quand  $N$  tend vers l'infini.

le résultat final de ce paragraphe, nous devons introduire les deux processus stochastiques suivants, définis pour tout  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$W_1^{(N)}(t) = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{n=0}^{[Nt]} a_{n-L}, \quad (5.22)$$

$$W_2^{(N)}(t) = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{n=0}^{[Nt]} \bar{\epsilon}(n), \quad (5.23)$$

où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ . On peut alors définir le processus stochastique bidimensionnel  $\mathbf{W}^{(N)}(t) = [W_1^{(N)}(t), W_2^{(N)}(t)]^T$ . Le théorème central limite standard implique que la suite de variables aléatoires vectorielles  $(\mathbf{W}^{(N)}(1))_{N \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne bidimensionnelle dont la matrice de covariance  $\mathbf{\Gamma}$  est définie par :

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} E \left( \begin{bmatrix} a_{n+k-L} \\ \bar{\epsilon}(n+k) \end{bmatrix} [a_{n-L} \bar{\epsilon}(n)] \right). \quad (5.24)$$

Le théorème central limite fonctionnel est un résultat plus général que le précédent. Il établit que, lorsque  $N$  tend vers l'infini, la densité de probabilité du processus stochastique  $(\mathbf{W}^{(N)}(t))_{t \in [0,1]}$  converge vers la densité de probabilité d'un mouvement brownien bidimensionnel  $(\mathbf{W}(t))_{t \in [0,1]}$  dont la matrice de covariance est égale à  $\mathbf{\Gamma}$ . Nous rappelons qu'un mouvement brownien  $(\mathbf{W}(t))_{t \in [0,1]}$  de matrice de covariance  $\mathbf{\Gamma}$  est un processus stochastique gaussien tel que pour tout  $t$  et pour tout  $s$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ ,

- $E(\mathbf{W}(t)) = 0$ ,
- $E(\mathbf{W}(t)\mathbf{W}(s)^T) = \mathbf{\Gamma} \min(t, s)$ .

En particulier, ceci implique que si  $f$  est une application définie sur un certain espace de fonctions définies sur  $[0, 1]$  (c.f. [40] pour davantage de précisions), alors la variable aléatoire fonctionnelle  $f(\mathbf{W}^{(N)})$  converge en loi vers la variable aléatoire  $f(\mathbf{W})$ . Afin d'illustrer l'affirmation qui précède, nous mentionnons les résultats suivants, qui sont des corollaires du théorème central limite fonctionnel :

$$\int_0^1 \mathbf{W}^{(N)}(t) dt = \frac{1}{N^{3/2}} \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^n a_{j-L} \\ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^n \bar{\epsilon}(j) \end{pmatrix}$$

converge en loi vers la variable aléatoire bidimensionnelle  $\int_0^1 \mathbf{W}(t) dt$ . De plus,

$$\int_0^1 (W_1^{(N)}(t))^2 dt = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^n a_{j-L} \right)^2$$

converge en loi vers la variable aléatoire  $\int_0^1 (W_1(t))^2 dt$ . En utilisant des arguments du même type, on montre également que :

$$\int_0^1 W_1^{(N)}(t) dW_2^{(N)}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^n a_{j-L} \right) \bar{\epsilon}(n)$$

converge en loi vers l'intégrale stochastique (au sens d'Ito)  $\int_0^1 W_1(t) dW_2(t)$ . En utilisant ce type de démarche, on peut directement montrer le résultat suivant :

**Résultat 5.1 :** Soit  $\zeta$  la variable aléatoire définie par :

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\mu + \left( \int_0^1 W_1(t) dt \right) W_2(1) - \int_0^1 W_1(t) dW_2(t)}{\left( \int_0^1 W_1(t)^2 dt \right) - \left( \int_0^1 W_1(t) dt \right)^2} \right]. \quad (5.25)$$

Alors,  $N(\hat{g}_N - g_0)$  converge en loi vers la variable aléatoire  $\frac{1}{h\rho}\zeta$ .

Comme  $\hat{h}_N = \frac{1}{\hat{g}_N}$ , le théorème dit de transfert présenté dans [41] implique que  $N(\hat{h}_N - h)$  et  $-\frac{1}{g_0}N(\hat{g}_N - g_0) = -h^2N(\hat{g}_N - g_0)$  ont la même distribution asymptotique. On en déduit immédiatement le résultat suivant :

**Résultat 5.2 :**  $N(\hat{h}_N - h)$  converge en loi vers la variable aléatoire  $-\frac{h}{\rho}\zeta$ .

## ■ Commentaires

- Nous remarquons d'abord que la vitesse de convergence de  $\hat{h}_N$  vers  $h$  est égale à  $\frac{1}{N}$  en ce sens que  $\hat{h}_N = h + O_P(\frac{1}{N})$ . La vitesse de convergence est donc différente de celle rencontrée dans un grand nombre de problèmes standards, pour lesquels la vitesse de convergence est égale à  $\frac{1}{N^{1/2}}$ . Par exemple, les estimateurs proposés dans [37] et [38] possèdent une vitesse de convergence égale à  $\frac{1}{N^{1/2}}$ .

- L'erreur quadratique moyenne asymptotique de  $\hat{h}_N$  augmente en fonction de  $h^2$ . Par conséquent, la performance est d'autant meilleure que l'indice de modulation est faible.

- L'erreur quadratique moyenne asymptotique de  $\hat{h}_N$  augmente en fonction de  $\frac{1}{\rho^2}$ . Comme nous nous y attendions, les performances dépendent fondamentalement de la valeur de  $\rho$ .

- Grâce à l'inégalité de Jensen ([42]), on constate que :

$$\int_0^1 W_1(t)^2 dt - \left( \int_0^1 W_1(t) dt \right)^2$$

est presque sûrement positif. Il est donc raisonnable de penser que  $E(\zeta)$  est en général non nul, et de signe égal au signe de

$$E \left( \mu + \left( \int_0^1 W_1(t) dt \right) W_2(1) - \int_0^1 W_1(t) dW_2(t) \right). \quad (5.26)$$

Nous tâchons maintenant de donner une expression plus informative de (5.26). Notons d'abord que  $E(W_1(t)W_2(1)) = \Gamma_{1,2}|1-t|$ , où  $\Gamma_{1,2}$  désigne le coefficient non diagonal de la matrice  $\mathbf{\Gamma}$  (i.e. le coefficient de corrélation entre les processus  $W_1$  et  $W_2$ ). Nous obtenons donc que  $E(\int_0^1 W_1(t) dt)W_2(1) = \frac{\Gamma_{1,2}}{2}$ . Or on peut montrer que  $\int_0^1 W_1(t) dW_2(t)$  est un terme de moyenne nulle. En tenant compte de toutes les remarques précédentes, nous pouvons conclure que l'espérance donnée par (5.26) est égale à  $\mu + \frac{\Gamma_{1,2}}{2}$ . Cette observation montre également que  $\hat{h}_N$  est biaisé, et que le biais est positif (resp. négatif) si et seulement si  $\mu + \frac{\Gamma_{1,2}}{2} < 0$  (resp.  $\mu + \frac{\Gamma_{1,2}}{2} > 0$ ).

■ Le cas  $L = 1$

Pour faciliter l'interprétation du résultat 5.2, nous étudions plus en détail le cas  $L = 1$ , pour lequel le comportement asymptotique de l'estimateur possède une expression plus simple. Nous faisons en outre l'hypothèse que le filtre de mise en forme vérifie la condition suivante :

$$g_a(t) = g_a(T_s - t)$$

pour tout  $t \in [0, T_s]$ . Cette condition est équivalente à :

$$\phi_a(T_s - t) = 1 - \phi_a(t) \quad (5.27)$$

pour  $0 \leq t \leq T_s$ . En remplaçant  $L$  par 1 dans (5.16), on constate que pour tout  $n = 0 \dots N - 1$  et pour tout  $m = 0 \dots M - 1$ ,  $\epsilon(nM + m) = i \sin(\pi\phi_m) a_n$ . Par conséquent, on peut écrire la suite  $(\bar{\epsilon}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  de la manière suivante :

$$\bar{\epsilon}(n) = \left[ \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sin(\pi\phi_m) \cos\left(\theta + \frac{\pi m}{M}\right) \right] a_n. \quad (5.28)$$

L'égalité ci-dessus implique que la seconde composante  $W_2(t)$  du vecteur  $\mathbf{W}(t)$  est égale à  $\left[ \frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sin(\pi\phi_m) \cos\left(\theta + \frac{\pi m}{M}\right) \right] W_1(t)$ . Donc, la loi limite de  $\hat{h}_N$  dépend seulement de la variance du mouvement brownien  $W_1(t)$ .

Nous discutons maintenant de l'influence du facteur de suréchantillonnage  $M$ . Pour cela, considérons d'abord le cas  $M = 1$ .

**Proposition 5.3 :** *Supposons que  $M = 1$ . Nous posons  $\phi_0 = \phi_a(T_s - \tau)$ , et nous supposons en outre que  $\tau > \frac{T_s}{2}$ . Alors  $N(\hat{h}_N - h)$  converge en loi vers la variable aléatoire*

$$\frac{h \sin \pi \phi_0}{\pi \cos \pi \phi_0} \left[ \frac{\phi_0 + \int_0^1 W_1(t) dW_1(t) - (\int_0^1 W_1(t) dt) W_1(1)}{(\int_0^1 W_1(t)^2 dt) - (\int_0^1 W_1(t) dt)^2} \right]. \quad (5.29)$$

**Preuve :** On peut aisément vérifier que  $\lambda$  est égal à  $\cos \pi \phi_0$ , et est donc réel. De plus, la fonction  $\phi_a(t)$  est croissante et vérifie  $\phi_a(T_s/2) = \frac{1}{2}$  grâce à (5.27). Il apparaît donc clairement que  $0 \leq \phi_a(t) \leq \frac{1}{2}$  de  $[0, \frac{T_s}{2}]$ . Ainsi,  $0 \leq \phi_0 \leq \frac{\pi}{2}$  et  $\lambda \geq 0$ . L'argument  $\theta$  de  $\lambda$  est donc égal à zéro, et  $\mu$  vérifie alors  $\mu = -2\phi_0 \sin \pi \phi_0$ . Ceci conduit immédiatement (5.29).

**Remarque 5.3 :** *Comme  $\phi_0 = \phi_a(T_s - \tau)$ , l'expression ci-dessus montre que les performances de l'estimateur dépendent fondamentalement du retard à l'arrivée  $\tau$ , qui est par ailleurs inconnu. Si  $\tau$  est proche de  $\frac{T_s}{2}$ , alors  $\cos \pi \phi_0$  est proche de zéro, et la variance asymptotique de l'estimateur proposé augmente.*

En pratique, il est donc utile de suréchantillonner le signal reçu : cela permet notamment de rendre le comportement asymptotique de l'erreur d'estimation à peu près indépendante de  $\tau$ .

Afin de justifier l'affirmation ci-dessus, nous supposons désormais que  $M$  tend vers l'infini. La proposition suivante est démontrée en annexe.

**Proposition 5.4 :** *Si  $M$  tend vers l'infini, la variable aléatoire  $\zeta$  est telle que*

$$\zeta \rightarrow \frac{T_s}{\pi} \frac{\left[ \int_0^{T_s/2} (1 - 2\phi_a(t)) \sin \pi\phi_a(t) \cos \pi t/T_s dt \right]}{\left( \int_0^1 W_1(t)^2 dt \right) - \left( \int_0^1 W_1(t) dt \right)^2}. \quad (5.30)$$

Cette proposition donne lieu aux remarques suivantes :

- Comme nous nous y attendions, on constate que les paramètres qui caractérisent la distribution asymptotique de l'estimée sont indépendants du retard à l'arrivée  $\tau$ . Il est donc utile de suréchantillonner le signal reçu.

- Puisque  $\phi_a(t) \leq \frac{1}{2}$  pour tout  $t$  dans l'intervalle  $[0, \frac{T_s}{2}]$ ,  $\mu$  converge vers une limite strictement positive. Or  $(\int_0^1 W_1(t)^2 dt) - (\int_0^1 W_1(t) dt)^2$  est presque sûrement positif, donc l'erreur d'estimation  $\hat{h}_N - h$  devient presque sûrement négative quand  $M$  tend vers l'infini.

- Remarquons enfin que le paramètre  $\rho = \lambda$ , qui est déterminant dans l'expression de la loi limite, est maximum si et seulement si  $\phi_a(t)$  coïncide avec  $\frac{t}{T_s}$  sur l'intervalle  $[0, T_s]$ . Cette affirmation peut être démontrée grâce à l'inégalité de Schwarz. Ceci permet de conclure que si  $L = 1$ , les meilleures performances de l'estimateur sont atteintes pour un filtre de mise en forme rectangulaire, i.e. pour des modulations 1REC.

### 5.5.2 Le cas bruité

Nous supposons maintenant que les échantillons du signal reçu sont affectés par un bruit additif :  $y(k) = \alpha s(k) + b(k)$ , et nous faisons l'hypothèse (non restrictive) que le paramètre  $\alpha$  est égal à  $\alpha = 1$  afin de simplifier les notations. Avant tout, nous faisons la distinction entre la contribution du bruit à la phase du signal reçu et sa contribution au module : pour tout  $k = 0 \dots NM - 1$ ,  $y(k) = \exp[i\psi(k)] \left( 1 + \tilde{b}(k) \right)$ , où  $\tilde{b}(k) = e^{-i\psi(k)} b(k)$ . Comme  $b(k)$  est supposé être une variable aléatoire complexe, gaussienne, et indépendante de  $e^{i\psi(k)}$ , alors  $\tilde{b}(k)$  est également une variable aléatoire gaussienne et indépendante de  $e^{i\psi(k)}$ . Nous posons  $1 + \tilde{b}(k) = r(k)e^{i\delta(k)}$  où  $\delta(k) \in ]-\pi, \pi]$ .  $(\delta(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  est une suite stationnaire de moyenne nulle. Les échantillons du signal reçu peuvent finalement s'écrire :

$$y(k) = r(k) \exp i [\psi(k) + \delta(k)]. \quad (5.31)$$

Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe 5.4.2, le calcul de  $y(k)^g$  nécessite de déployer la phase de  $y(k)$ . Le bruit additif peut être à l'origine de certaines erreurs de déploiement de phase qui, malheureusement, peuvent difficilement être prises en compte lors de l'étude asymptotique. Il est donc difficile d'étendre de manière rigoureuse l'analyse précédente au cas bruité. Toutefois, les résultats du paragraphe 5.5.1 peuvent être généralisés dès lors que l'on néglige les erreurs de déploiement de phase, c'est à dire dès lors que l'on suppose que la phase déployée de  $y(k)$  correspond exactement à  $\psi(k) + \delta(k)$  pour tout  $k$ . Grâce à cette hypothèse, nous établissons ici que  $N(\hat{h}_N - h)$  converge en loi vers une certaine variable aléatoire non gaussienne. Au paragraphe 5.6, nous comparons les prédictions théoriques à une estimation empirique de la distribution de  $\hat{h}_N$ , afin d'observer dans quels contextes nos hypothèses sont valides.

En utilisant des calculs tels que ceux du paragraphe précédent, et en appliquant à nouveau le théorème central limite fonctionnel, on peut montrer le résultat suivant. Dans toute la suite, la notation *no* (pour *noisy*) désigne le cas bruité.

**Résultat 5.3 :** Soit  $\zeta_{no}$  la variable aléatoire définie par :

$$\zeta_{no} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\mu_{no} + (\int_0^1 W_1(t) dt) W_{2,no}(1) - \int_0^1 W_1(t) dW_{2,no}(t)}{(\int_0^1 W_1(t)^2 dt) - (\int_0^1 W_1(t) dt)^2} \right], \quad (5.32)$$

où  $\mu_{no}$  représente la constante déterministe définie par :

$$\mu_{no} = \mu - 2 \frac{E(\delta \sin(g_0 \delta))}{E(\cos(g_0 \delta))} \quad (5.33)$$

et où  $W_1(t)$  est le mouvement Brownien défini dans le cas non bruité.  $W_{2,no}(t)$  est tel que  $\mathbf{W}_{no}(t) = (W_1(t), W_{2,no}(t))^T$  est un mouvement brownien bidimensionnel dont la matrice de covariance  $\mathbf{\Gamma}_{no}$  vérifie en particulier  $\Gamma_{1,2,no} = \Gamma_{1,2}$ , où  $\Gamma_{1,2}$  représente le coefficient non diagonal de la matrice  $\mathbf{\Gamma}$  dans le cas non bruité. Finalement,

- $N(\hat{g}_N - g_0)$  converge en loi vers la variable aléatoire  $\frac{1}{h\rho} \zeta_{no}$ .
- $N(\hat{h}_N - h)$  converge en loi vers la variable aléatoire  $-\frac{h}{\rho} \zeta_{no}$ .

Nous remarquons d'abord que l'expression (5.32) possède une forme très similaire à celle de la distribution limite obtenue dans le cas non bruité et donnée par le résultat 5.1. Bien entendu, le bruit additif a néanmoins une influence sur le biais et sur la variance de l'estimée  $\hat{h}_N$ . En effet, on peut montrer que la variance du second mouvement brownien  $W_{2,no}(t)$  augmente en présence de bruit. On peut donc légitimement penser que la variance  $\zeta_{no}$  est également affectée par le bruit. De plus, on peut montrer comme au paragraphe précédent que l'estimateur  $\hat{h}_N$  est biaisé et qu'il est biaisé positivement (resp. négativement) si et seulement si  $\mu_{no} + \frac{\Gamma_{1,2}}{2} < 0$  (resp.  $\mu_{no} + \frac{\Gamma_{1,2}}{2} > 0$ ). Puisque  $E(\delta \sin(g_0 \delta))$  est un nombre positif, on remarque que

$$\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{-2 E(\delta \sin(g_0 \delta)) / E(\cos(g_0 \delta))}{(\int_0^1 W_1(t)^2 dt) - (\int_0^1 W_1(t) dt)^2} \right] \quad (5.34)$$

correspond à un terme additionnel presque sûrement négatif et provenant spécifiquement du bruit additif. Si  $\zeta$  représente la variable aléatoire définie par (5.25) dans le cas bruité, nous constatons que  $E(\zeta_{no}) - E(\zeta) < 0$ . Puisqu'en outre  $N(\hat{h}_N - h)$  converge en loi vers  $-\frac{h}{\rho} \zeta_{no}$ , nous déduisons de l'affirmation précédente que le bruit additif produit un biais additif positif.

Enfin, nous soulignons à nouveau que le résultat précédent repose sur l'hypothèse que la procédure de déploiement de phase ne génère aucune erreur. Par conséquent, le résultat 5.3 permet de prédire le comportement asymptotique de l'estimateur pratique seulement si le rapport signal sur bruit est suffisamment important pour que la procédure de déploiement ne produise qu'un faible nombre d'erreurs. Les simulations du paragraphe suivant permettent en particulier de caractériser les valeurs du rapport signal sur bruit pour lesquelles les résultats théoriques correspondent effectivement aux résultats pratiques.

## 5.6 Simulations et performances

### 5.6.1 Comparaison aux résultats empiriques

Nous comparons ici nos prédictions théoriques aux résultats empiriques. Donnons d'abord les paramètres utilisés lors des simulations. Le nombre  $N$  de symboles reçus est fixé à  $N = 1000$ . Le retard  $\tau$  est égal à  $\tau = 0.21 T_s$ . Le bruit additif est supposé blanc dans l'intervalle de fréquences  $[-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}]$ , de telle sorte que sa variance  $\sigma^2$  correspond à  $\sigma^2 = \frac{2}{T_s} N_0$ . Les résultats qui suivent sont obtenus en utilisant soit des signaux 1REC (i.e. le filtre de mise en forme vérifie  $g_a(t) = \frac{1}{T_s}$  sur  $[0, T_s[$  et  $g_a(t) = 0$  ailleurs) d'indice de modulation  $h = 0.5$ , soit des signaux 3RC (i.e. le filtre de mise en forme est un cosinus surélevé d'ordre  $L = 3$  donné par  $g_a(t) = \frac{1}{LT_s}(1 - \cos \frac{2\pi t}{LT_s})\mathbf{I}_{0 \leq t \leq LT_s}$ ) d'indice de modulation  $h = 0.7$ . Finalement, le facteur de suréchantillonnage  $M$  est égal à  $M = 4$  sauf indication contraire.

Ainsi que nous l'avons proposé, la fonction  $J_N$  est d'abord évaluée sur une grille de recherche, et l'argument du maximum est utilisé comme point d'initialisation d'un algorithme de Newton. L'intervalle de recherche est égal à  $[0.3, 0.9]$  et le nombre de points de la grille est fixé à 120. 10 itérations de l'algorithme de Newton sont utilisées. Les résultats précédents permettent d'établir que l'erreur quadratique moyenne de  $\hat{h}_N$  est proportionnelle à  $h^2/N^2$  quand  $N$  tend vers l'infini. Dans ce qui suit, nous représentons donc la distribution de la variable aléatoire  $N(\hat{h}_N - h)/h$ , afin de pouvoir comparer les résultats obtenus dans chacun des contextes de simulations choisis (i.e. modulation 1REC d'indice  $h = 0.5$  et modulation 3RC d'indice  $h = 0.7$ ). Dans chaque cas, la distribution empirique est représentée par un histogramme dressé sur la base de  $10^4$  réalisations de la variable aléatoire  $N(\hat{h}_N - h)/h$ . La densité de probabilité (pdf) théorique est approximée par le biais d'un histogramme basé sur  $10^5$  réalisations de la variable aléatoire limite  $-\frac{h}{\rho}\zeta_{no}/h$ . Les figures 5.1 et 5.2 représentent les distributions théoriques et empiriques respectivement pour des signaux 1REC et 3RC, et pour  $\frac{E_b}{N_0} = 25\text{dB}$  et  $\frac{E_b}{N_0} = 15\text{dB}$ , où  $E_b$  représente l'énergie par bit du signal.

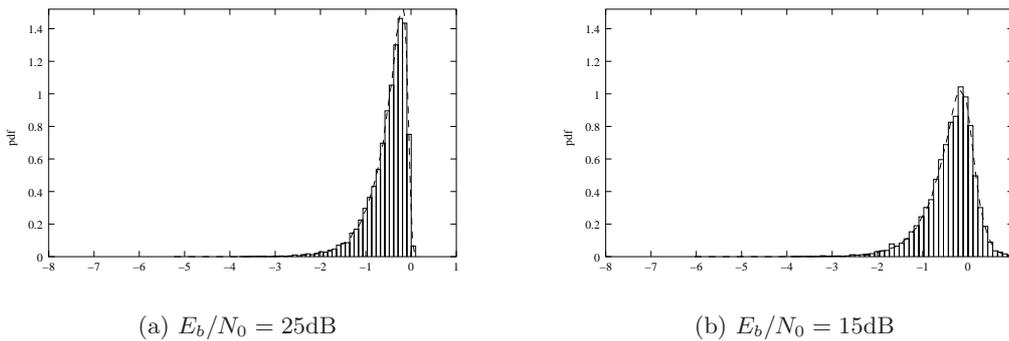


FIG. 5.1 – Histogramme normalisé de  $N(\hat{h}_N - h)/h$  et distribution limite théorique - modulation 1REC -  $\tau = 0.21T_s$

Nous remarquons d'abord que l'histogramme correspondant à la distribution limite  $-\frac{h}{\rho}\zeta_{no}/h$  correspond bien à l'histogramme empirique de  $N(\hat{h}_N - h)/h$ . Les performances sont manifestement meilleures lorsqu'un signal 1REC est émis. Dans le cas de modulations 3RC, les performances obtenues restent approximativement les mêmes pour  $\frac{E_b}{N_0} = 25\text{dB}$

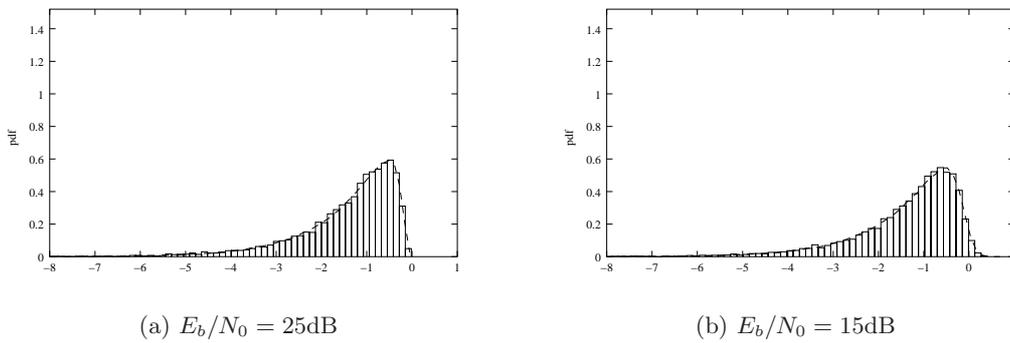


FIG. 5.2 – Histogramme normalisé de  $N(\hat{h}_N - h)/h$  et distribution limite théorique - modulation 3RC -  $\tau = 0.21T_s$

et pour  $\frac{E_b}{N_0} = 15\text{dB}$ , alors que dans le cas de modulations 1REC, le niveau de bruit semble avoir une plus grande influence sur l'erreur d'estimation. Au paragraphe précédent, nous avons montré que, dans le cas de signaux 1REC et en l'absence de bruit, l'erreur d'estimation  $\hat{h}_N - h$  est presque sûrement négative lorsque le facteur de suréchantillonnage  $M$  tend vers l'infini. La figure 5.1a confirme cette affirmation : dès que le rapport  $\frac{E_b}{N_0}$  est suffisamment important, la quasi-totalité des réalisations de  $\hat{h}_N - h$  est négative. L'affirmation précédente est donc valable alors que le facteur de suréchantillonnage  $M$  est seulement égal à  $M = 4$ . En outre, la figure 5.2a permet de penser que cette remarque reste vraie dans le cas de signaux 3RC. À l'inverse, lorsque  $\frac{E_b}{N_0}$  est égal à 15dB, on observe sur les figures 5.1b et 5.2b qu'un nombre significatif de réalisations sont telles que  $\hat{h}_N - h$  est positif. Ceci traduit le fait que le bruit additif génère un biais additionnel positif.

Considérons maintenant des rapport signal sur bruit moins favorables. La figure 5.3 est obtenue pour un  $\frac{E_b}{N_0} = 10\text{dB}$  et pour une modulation 3RC. Dans ce contexte, l'hypothèse que nous avons formulée afin de mener à bien l'analyse asymptotique n'est plus valide. Les erreurs de déploiement de phase sont en nombre non négligeable. Pour cette raison, les prédictions théoriques ne correspondent plus aux résultats empiriques.

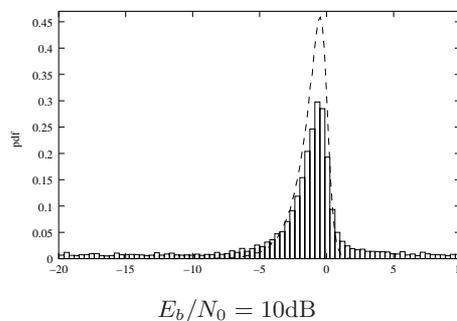


FIG. 5.3 – Histogramme normalisé de  $N(\hat{h}_N - h)/h$  et distribution limite théorique - modulation 3RC -  $\tau = 0.21T_s$

### 5.6.2 Performances asymptotiques

Nous étudions maintenant le comportement de la distribution limite théorique de  $\hat{h}_N$  quand le nombre  $N$  de symboles observés tend vers l'infini. Les réalisations de la variable aléatoire  $-\frac{h}{\rho}\zeta_{no}/h$  sont calculées grâce au résultat 5.3. Afin d'évaluer les performances asymptotiques, nous représentons les statistiques  $\Delta_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} NE(\hat{h}_N/h - 1)$  et  $\sigma_\infty^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 E((\hat{h}_N - E(\hat{h}_N))/h)^2$ . Notons que  $\Delta_\infty$  et  $\sigma_\infty$  ne dépendent pas de la valeur de l'indice de modulation. Comme la distribution limite de la variable aléatoire  $N(\hat{h}_N - h)/h$  est non gaussienne,  $\Delta_\infty$  et  $\sigma_\infty$  ne suffisent pas à décrire exhaustivement le comportement asymptotique de l'estimée. Toutefois, ces valeurs permettent d'illustrer simplement la distribution limite.  $10^5$  réalisations de la variable aléatoire  $-\frac{h}{\rho}\zeta_{no}/h$  ont été utilisées pour estimer  $\Delta_\infty$  et  $\sigma_\infty$ .

Nous considérons comme précédemment des signaux 1REC ( $h = 0.5$ ) et 3RC ( $h = 0.7$ ). Les figures 5.4 et 5.5 traduisent l'influence du retard  $\tau$  sur  $\Delta_\infty$  et  $\sigma_\infty$ , dans le cas sans bruit.

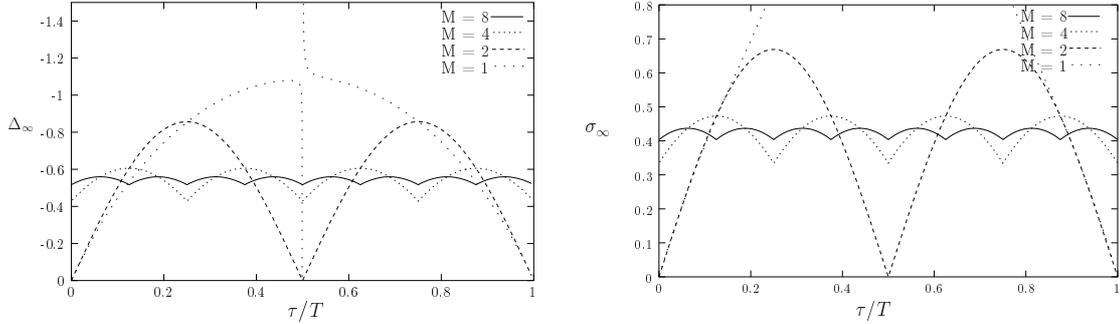


FIG. 5.4 –  $\Delta_\infty$  et  $\sigma_\infty$  en fonction de  $\tau$  - signaux 1REC - Cas non bruité

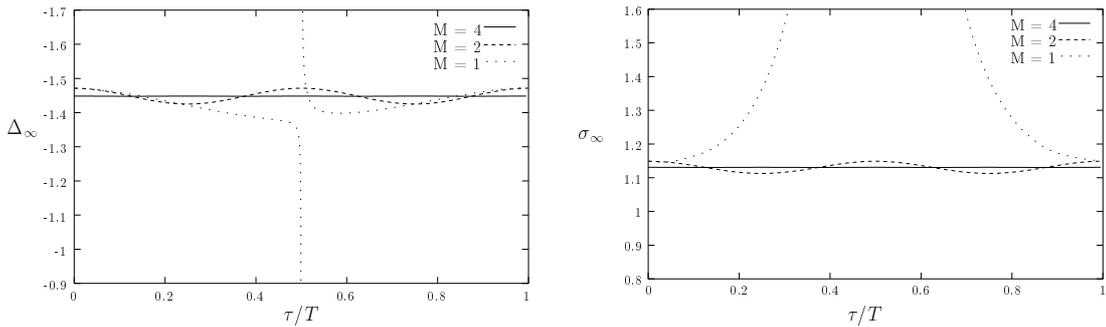


FIG. 5.5 –  $\Delta_\infty$  et  $\sigma_\infty$  en fonction de  $\tau$  - signaux 3RC - Cas non bruité

Comme précédemment, nous remarquons en premier lieu que les performances sont meilleures pour des signaux 1REC que pour des signaux 3RC, dès lors que le facteur de suréchantillonnage  $M$  est suffisamment important. Lorsque  $M = 1$ , le biais et la variance de l'estimateur dépendent de manière cruciale du retard  $\tau$ . En particulier, les figures 5.4 et 5.5 confirment que, si  $M = 1$  et si  $\tau$  est proche de  $\frac{T_s}{2}$ , l'écart-type asymptotique normalisé  $\sigma_\infty$  tend vers l'infini. Ainsi que nous l'avons mentionné au paragraphe précédent, plus le facteur de suréchantillonnage est grand, moins l'influence de  $\tau$  sur les performances est importante. Suréchantillonner d'un facteur  $M = 4$  semble être suffisant pour rendre le

biais et la variance de l'estimateur à peu près indépendants de  $\tau$ .

Nous étudions ensuite l'influence du bruit sur les performances asymptotiques. Le facteur de suréchantillonnage est fixé à  $M = 4$ , si bien que les résultats qui suivent ne dépendent pas fondamentalement du retard à l'arrivée  $\tau$ . Comme au paragraphe précédent,  $\tau$  est supposé égal à  $\tau = 0.21T_s$  et le bruit  $b_a(t)$  est blanc dans l'intervalle de fréquences  $[-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}]$ . Les figures 5.6a et 5.6b représentent respectivement le comportement du biais asymptotique normalisé  $\Delta_\infty$  et de l'écart-type asymptotique normalisé  $\sigma_\infty$ , quand le rapport signal sur bruit varie. Nous faisons également figurer les biais et les écarts-type empiriques afin de les comparer aux résultats théoriques.

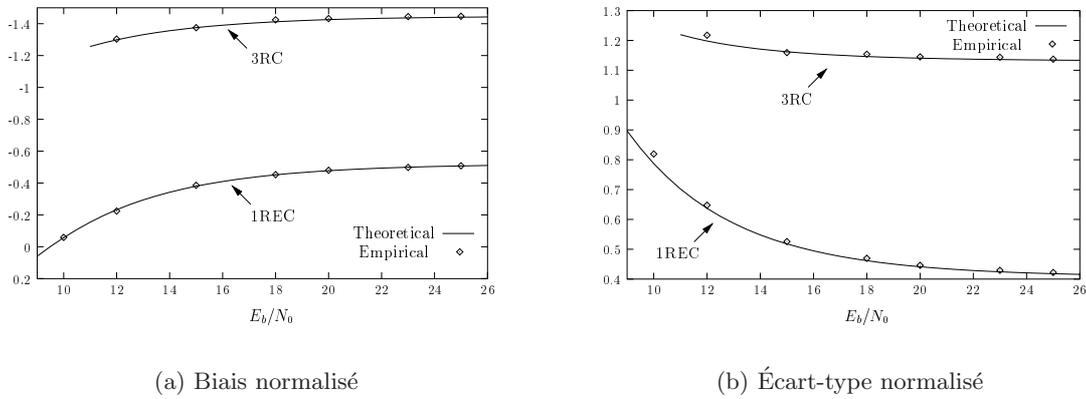


FIG. 5.6 – Performances théoriques et empiriques en fonction de  $E_b/N_0$

Notons avant tout que les résultats empiriques correspondent bien aux résultats théoriques dès que  $\frac{E_b}{N_0} \geq 10\text{dB}$  pour des signaux 1REC, et dès que  $\frac{E_b}{N_0} \geq 12\text{dB}$  pour des signaux 3RC. Nous remarquons également que les variations du rapport signal sur bruit ne semblent avoir qu'une faible influence sur les performances, ceci étant particulièrement vrai pour les modulations 3RC.

### 5.6.3 Comparaison à un estimateur basé sur les statistiques d'ordre supérieur

Nous comparons enfin les performances de l'estimateur proposé aux performances d'un estimateur basé sur les statistiques d'ordre supérieur. Ce dernier a été brièvement présenté au paragraphe 5.3.2. Dans la suite, nous utilisons l'appellation *estimateur H.O.S.* (Higher Order Statistics) pour faire référence à l'estimateur en question, et nous désignons l'estimée correspondante par  $\hat{h}_N^F$ . Nous rappelons que cette méthode d'estimation ne peut être appliquée que pour des signaux CPM à réponse complète (i.e.  $L = 1$ ) et suppose en outre que le retard  $\tau$  a été correctement compensé (i.e.  $\tau = 0$ ). Nous rappelons que  $\hat{h}_N^F$  converge vers  $h$  à la vitesse  $\frac{1}{N^{1/2}}$  (ce résultat figure notamment dans [37]). Dans nos simulations, nous continuons à considérer à la fois les modulations 1REC et 3RC. Nous supposons comme dans [37] que le facteur de suréchantillonnage  $M$  est égal à 1. L'indice de modulation est fixé à  $h = 0.7$ . Le nombre d'échantillons reçus est fixé à  $N = 1000$  sauf indication contraire.

Afin d'évaluer les performances, nous commençons par comparer les erreurs quadratiques moyennes (EQM) de chaque estimateur, pour différentes valeurs de  $E_b/N_0$ . Ces EQM sont estimées grâce à 5000 réalisations de  $\hat{h}_N$  et de  $\hat{h}_N^F$ .

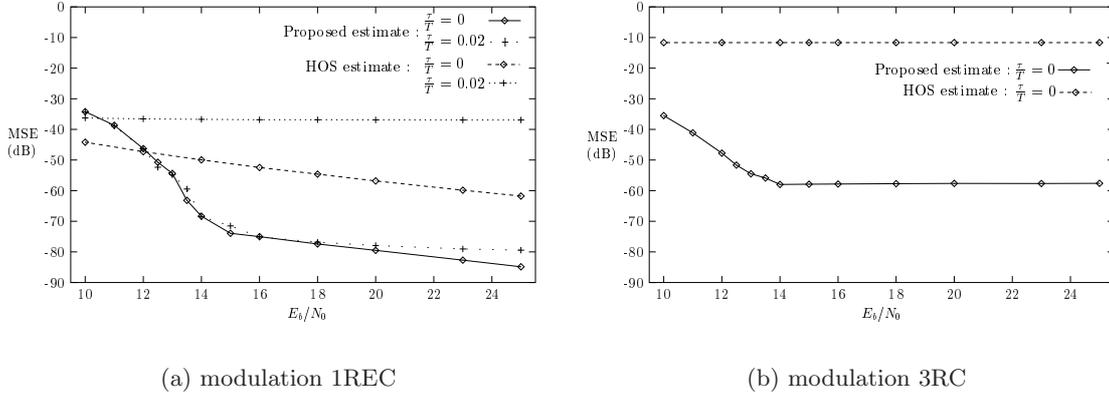


FIG. 5.7 – Erreurs quadratiques moyennes en fonction de  $E_b/N_0$  -  $N = 1000$ ,  $h = 0.7$ ,  $M = 1$ .

Les figures 5.7a et 5.7b traduisent *i)* l'effet du bruit additif sur les performances *ii)* l'effet d'un éventuel défaut de synchronisation en temps sur les performances. Si le retard à l'arrivée est égal à zéro (synchronisation parfaite) et si le signal émis correspond à une modulation 1REC, on constate au vu de la figure 5.7a que les EQM des deux estimateurs tendent vers zéro quand le rapport signal sur bruit tend vers l'infini. Cette remarque est en accord avec les observations faites dans les paragraphes précédents. Dans un tel contexte de simulation, on constate que les performances de la méthode proposée sont meilleures que celles de l'estimateur basé sur les statistiques d'ordre supérieur, dès lors que le rapport signal sur bruit est supérieur à 12dB environ. Néanmoins, la méthode *H.O.S.* ne souffre pas des erreurs de déploiement de phase : si le retard à l'arrivée a été parfaitement compensé (i.e.  $\tau = 0$ ), les performances de cette méthode deviennent meilleures que celles de la méthode proposée pour de faibles rapports signal sur bruit. D'un autre côté, la figure 5.7a permet de s'apercevoir que l'estimateur proposé est très peu sensible à un éventuel défaut de synchronisation (i.e.  $\tau \neq 0$ ), alors que l'EQM de l'estimateur *H.O.S.* augmente dans un tel cas. Autrement dit, les performances de l'estimateur basé sur les statistiques d'ordre supérieur dépendent de manière cruciale de l'efficacité de la procédure de synchronisation préalable.

La figure 5.7b représente l'EQM lorsque le signal émis correspond à une modulation 3RC. Nous observons que l'estimateur *H.O.S.* conduit à des performances catastrophiques, ce qui confirme le fait que cette méthode est inadaptée dans le cas de CPM à réponse partielle.

Enfin, la figure 5.8 illustre l'influence du nombre  $N$  de symboles observés sur l'erreur quadratique moyenne, dans le cas où  $E_b/N_0$  est égal à 15dB. Comme prévu, l'écart entre les performances caractérisant chacune des deux approches augmente avec le nombre d'échantillons reçus.

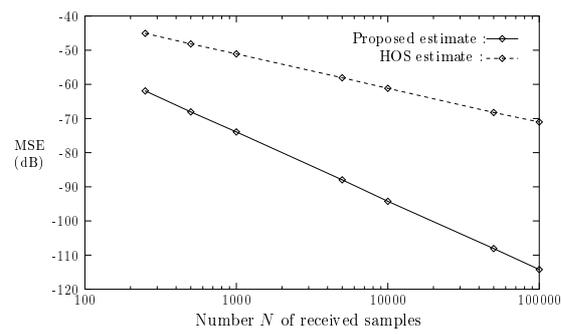


FIG. 5.8 – Erreur quadratique moyenne en fonction de  $N$  -  $E_b/N_0 = 15\text{dB}$ ,  $h = 0.7$ ,  $M = 1$ .



---

## Chapitre 6

# Mise en œuvre de la chaîne complète

Dans ce chapitre, nous évaluons par simulation les performances de l'ensemble des traitements séquentiels effectués à la réception. On se place donc dans le cas général où les paramètres techniques sont inconnus. La figure 6.1 représente la structure de la chaîne de réception mise en œuvre dans le cadre de ce chapitre. Le signal reçu grossièrement ramené

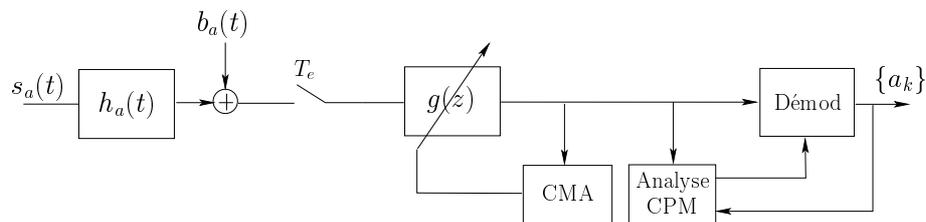


FIG. 6.1 – Schéma synoptique de la chaîne complète

en bande de base est d'abord égalisé en utilisant le CMA. Dans un deuxième temps, un estimateur conjoint de la période symbole, de l'indice et du résidu de porteuse est appliqué au signal égalisé. Les estimées obtenues seront utilisées par l'algorithme de démodulation afin d'extraire les symboles d'information.

Nous commençons par décrire plus précisément les différentes techniques utilisées ainsi que les paramètres utilisés lors des simulations. Enfin nous évaluons les performances de la chaîne de réception.

### 6.1 Caractéristiques de la chaîne de transmission considérée

#### 6.1.1 Paramètres utilisés à l'émission, canal et bruit additif

Dans nos simulations, nous avons considéré que l'émetteur utilise soit une modulation 3RC d'indice 0.7, soit une modulation 1REC d'indice 0.5 (modulation MSK). Pour chaque réalisation du signal émis, le rythme symbole  $1/T_s$  est tiré de manière uniforme dans un intervalle du type  $[1/(\bar{T}_s + \epsilon_{T_s}), 1/(\bar{T}_s - \epsilon_{T_s})]$ .  $\bar{T}_s$  représente la valeur moyenne statistique

de  $T_s$  sur l'ensemble des réalisations. Dans nos simulations, nous avons choisi  $\epsilon_{T_s} = 10^{-3}\overline{T_s}$ .

Pour chaque réalisation du signal émis, un canal de transmission multi-trajets est tiré aléatoirement selon la même procédure qu'au paragraphe 3.7. Le nombre de trajets est compris entre 2 et 5 (inclus) et est tiré de manière uniforme ; les retards sont compris entre 0 et  $5T_s$  et sont eux aussi tirés uniformément ; les amplitudes complexes des trajets sont des variables aléatoires gaussiennes complexes et indépendantes entre elles.

Le bruit est supposé blanc gaussien dans la bande  $[-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}]$ . Le rapport signal sur bruit pris en compte est le rapport  $E_b/N_0$  de l'énergie par bit reçue par la densité spectrale du bruit.

### 6.1.2 Réception du signal

Le signal reçu est observé pendant une durée  $T_{obs} = 1000\overline{T_s}$ . Nous supposons qu'un résidu de fréquence porteuse  $\delta f_0$  subsiste. Dans les simulations qui suivent, nous posons  $\delta f_0 = 0.1/\overline{T_s}$ . Le signal analogique reçu est filtré passe-bas dans la bande  $[-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}]$  puis est échantillonné à la période  $T_e = \frac{\overline{T_s}}{4}$ .

### 6.1.3 Algorithme du module constant

L'algorithme d'égalisation aveugle utilisé est comme auparavant le CMA. Nous appliquons aux échantillons du signal reçu un filtre égaliseur à  $N_{eg} = 160$  coefficients fonctionnant à la cadence  $T_e$ . Le critère d'arrêt du CMA est le même qu'au paragraphe 3.7. Le CMA est stoppé lorsque la quantité  $\Delta^{(j)}$  définie par (3.76) devient inférieure à  $(5.10^{-4})^2$ , en imposant toutefois un minimum de 20 itérations et un maximum de 500 itérations.

### 6.1.4 Estimation des paramètres techniques

Plusieurs alternatives sont envisageables afin d'estimer les paramètres techniques (*c.f.* chapitres 4, 5 et annexe A). Afin de déterminer quelle méthode est la mieux adaptée à nos contextes expérimentaux, nous avons effectué des tests qui nous ont incités à retenir l'approche définie dans l'annexe A. La méthode consiste à estimer conjointement l'indice  $h$  de la modulation, la période symbole  $T_s$  et le résidu de fréquence porteuse  $\delta f_0$ . Cet estimateur peut être vu comme une extension de l'estimateur de l'indice présenté au chapitre 5. Une description plus détaillée du principe et des performances intrinsèques de l'estimateur conjoint est disponible dans l'annexe A.

Il ressort notamment de cette étude que, afin d'éviter les ambiguïtés de l'estimateur conjoint, il est nécessaire que

$$|\delta f_0| < \frac{h}{2T_s}. \quad (6.1)$$

Or, rien ne permet *a priori* d'assurer que le résidu de fréquence porteuse  $\delta f_0$  est suffisamment faible pour que la condition ci-dessus soit vérifiée. Nous proposons donc, préalablement à l'estimation conjointe, d'estimer au moins grossièrement le résidu de fréquence porteuse et de compenser l'estimée obtenue au niveau du signal. L'estimée grossière de  $\delta f_0$  est définie en remarquant que la moyenne statistique de la fréquence instantanée du signal coïncide avec  $\delta f_0 \frac{\overline{T_s}}{4}$ . L'estimateur grossier consiste alors à calculer la moyenne empirique de la fréquence instantanée. Ceci peut être réalisé grâce à la procédure de déploiement de

phase décrite au paragraphe 4.3.3. Rappelons qu'en présence de bruit, des erreurs de déploiement de phase peuvent se produire. En outre, lorsque le résidu de fréquence porteuse est important, nous avons remarqué que ces erreurs ont une distribution non uniforme et tendent à biaiser l'estimateur de  $\delta f_0$  obtenu en moyennant la fréquence instantanée. Au contraire l'estimateur n'est pas biaisé lorsque  $\delta f_0$  est proche de zéro. Pour cette raison, nous proposons d'estimer une première fois  $\delta f_0$  en moyennant la fréquence instantanée, de compenser ensuite l'estimée obtenue au niveau du signal et d'estimer le résidu de porteuse encore présent à nouveau en moyennant la fréquence instantanée. Nous espérons ainsi que le biais dû aux éventuelles erreurs de déploiement de phase soit moindre lorsque le résidu de porteuse a déjà été compensé une première fois auparavant. En pratique, nous réitérons 4 fois les deux étapes de traitement estimation-compensation afin d'augmenter nos chances de voir la relation (6.1) vérifiée à l'issue de la compensation grossière de  $\delta f_0$ .

La procédure d'estimation conjointe de  $h$ ,  $T_s$  et  $\delta f_0$  est décrite dans le détail au paragraphe A.2.3 de l'annexe A. Nous rappelons ici quels sont les paramètres utilisés. L'indice est estimé par recherche exhaustive sur une grille de 120 points uniformément répartis dans l'intervalle  $[0.3, 0.9]$ . Pour chaque point de la grille, nous utilisons 4 itérations d'un algorithme de Newton afin de déterminer les abscisses des pics de la fonction de coût. A l'issue de cette première estimation conjointe, nous affinons les estimées en faisant cette fois varier l'indice sur une grille fine centrée sur l'estimée précédente, et dont le pas est égal à  $10^{-5}$ .

### 6.1.5 Synchronisation en temps et en phase - Démodulation

A l'issue de l'étape d'estimation des paramètres techniques, le signal est interpolé au rythme  $\frac{\hat{T}_s}{8}$  pour les besoins de la synchronisation, où  $\hat{T}_s$  désigne l'estimée de la période symbole. Le résidu de fréquence porteuse estimé est compensé au niveau du signal.

La procédure de démodulation est identique à celle déjà considérée au chapitre 3 à la différence près que les vraies valeurs des paramètres sont cette fois inconnues du récepteur et doivent être remplacées par leurs estimées lors de la procédure de démodulation. Le démodulateur cohérent est utilisé pour extraire les symboles. La synchronisation en temps et en phase est effectuée de manière conjointe avec l'extraction des symboles selon la procédure décrite au paragraphe 3.7. Puisqu'à ce stade la fonction de mise en forme utilisée à l'émission est encore inconnue, nous faisons fonctionner le démodulateur en supposant que la modulation utilisée est de type 1RC. Nous avons vu au chapitre 2 que cette hypothèse, même lorsqu'elle n'est pas vérifiée, n'a qu'une faible influence sur les performances du démodulateur. Pour le reste, les paramètres utilisés sont les mêmes qu'au paragraphe 3.7. La grille de recherche du déphasage comporte 10 points dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$ , et nous faisons fonctionner le démodulateur cohérent à la cadence  $\frac{\hat{T}_s}{2}$ . Notons également que l'emploi du démodulateur cohérent nécessite de quantifier l'estimée de l'indice de la modulation. Pour cela, nous utilisons la méthode décrite au paragraphe 2.2.2 avec  $Q_{\max} = 10$ ;

### 6.1.6 Estimation de la fonction de mise en forme

Afin de décrire la chaîne de réception dans son intégralité, nous expliquons ici comment il serait possible d'utiliser la séquence estimée des symboles, récupérée en sortie du démodulateur afin d'estimer le filtre de mise en forme  $g_a(t)$  utilisé par l'émetteur.

**Principe :** Afin de décrire la méthode, nous nous plaçons dans le cas idéal où le canal de transmission a été parfaitement compensé, et nous cherchons à estimer le filtre de mise en forme à partir d'une version échantillonnée d'un signal CPM bruité. On pose  $y_a(t) = s_a(t) + \tilde{b}_a(t)$  où  $s_a(t)$  représente le signal CPM émis et où  $\tilde{b}_a(t)$  est un bruit additif gaussien. Nous supposons connus l'ensemble des paramètres ainsi que les symboles émis. De simples calculs montrent que la fréquence instantanée de  $y_a(t)$  s'écrit pour tout  $t$  :

$$\pi h \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g_a(t - kT_s) + \tilde{\delta}_a(t),$$

où  $\tilde{\delta}_a(t)$  représente un certain bruit de phase (non gaussien). Nous proposons d'estimer  $g_a(t)$  grâce à une méthode paramétrique. Soit  $M$  un entier. A partir des échantillons de signal dont nous disposons, il est possible d'obtenir une estimation de la fréquence instantanée ci-dessus aux instants multiples de  $\frac{T_s}{M}$ . Or, en se rappelant que  $g_a(t)$  a pour support l'intervalle  $[0, LT_s]$ , on peut écrire que pour tout entier  $n$  et pour tout entier  $m \in \{0, \dots, M-1\}$ , la fréquence instantanée à l'instant  $nT_s + m\frac{T_s}{M}$  vaut :

$$f_i(nT_s + m\frac{T_s}{M}) = \pi h \sum_{k=0}^{L-1} a_{n-k} g_a(kT_s + m\frac{T_s}{M}) + \tilde{\delta}_a(nT_s + m\frac{T_s}{M}). \quad (6.2)$$

Nous introduisons les notations suivantes. Pour tout  $n$ , nous posons :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(k) &= [g_a(kT_s), \dots, g_a(kT_s + (M-1)\frac{T_s}{M})]^T, \\ \mathbf{f}_i(n) &= [f_i(nT_s), \dots, f_i(nT_s + (M-1)\frac{T_s}{M})]^T, \\ \tilde{\delta}(n) &= [\tilde{\delta}(nT_s), \dots, \tilde{\delta}(nT_s + (M-1)\frac{T_s}{M})]^T. \end{aligned}$$

Pour tout  $k \in \{0, \dots, L-1\}$ , nous posons en outre :

$$\mathbf{g}(k) = [g_a(kT_s), \dots, g_a(kT_s + (M-1)\frac{T_s}{M})]^T.$$

Pour tout entier  $n$ , l'équation (6.2) revient alors à :

$$\mathbf{f}_i(n) = \pi h \sum_{k=0}^{L-1} a_{n-k} \mathbf{g}(k) + \tilde{\delta}(n). \quad (6.3)$$

Naturellement, la longueur  $L$  du filtre de mise en forme est également inconnue en pratique, si bien qu'il est inévitable de sur-dimensionner le vecteur des paramètres à estimer. Nous choisissons donc arbitrairement un entier  $L'$  tel que  $L' > L$  et nous cherchons à estimer le vecteur

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= [\mathbf{g}(0), \dots, \mathbf{g}(L'-1)]^T \\ &= [\mathbf{g}(0), \dots, \mathbf{g}(L-1), 0, \dots, 0]^T. \end{aligned}$$

Ce vecteur vérifie bien entendu :

$$\mathbf{f}_i(n) = \pi h \sum_{k=0}^{L'-1} a_{n-k} \mathbf{g}(k) + \tilde{\delta}(n). \quad (6.4)$$

Puisque les valeurs des symboles  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sont supposées connues, nous proposons d'estimer le vecteur ci-dessus par la méthode des moindres carrés. L'estimée  $\hat{\mathbf{G}} = [\hat{\mathbf{g}}(0), \dots, \hat{\mathbf{g}}(L-1)]^T$  de  $\mathbf{G}$  est définie comme le vecteur qui rend minimale la quantité

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left( \mathbf{f}_i(n) - \pi h \sum_{k=0}^{L'-1} a_{n-k} \hat{\mathbf{g}}(k) \right)^2$$

où  $N$  correspond au nombre de symboles observés. Notons pour finir que cette approche est sous optimale : comme le bruit de phase  $\tilde{\delta}(n)$  n'est pas un bruit blanc gaussien, le critère des moindres carrés ne coïncide pas avec celui du maximum de vraisemblance.

## 6.2 Simulations

Le contexte de simulation est le même qu'au paragraphe 3 à l'exception près que les paramètres techniques de la modulation sont cette fois estimés au lieu d'être supposés connus. Les résultats de simulation du paragraphe 3.7 pourront donc nous servir de référence afin d'étudier l'impact que produit le fait d'estimer les paramètres.

Avant de présenter les résultats de simulations, nous soulignons le fait que la méthode d'estimation des paramètres techniques qui a été retenue est sensible aux éventuelles erreurs de déploiement de la phase du signal égalisé, comme nous l'avons remarqué au chapitre 5 ainsi que dans l'annexe A. Nous avons vu que, même dans le cas idéal d'un canal à trajet unique, les erreurs de déploiement de phase conduisent à des erreurs d'estimation catastrophiques dès que le rapport  $E_b/N_0$  est plus petit que 12dB. Il ne faut donc pas s'attendre à ce que la chaîne de démodulation conduisent à de bons résultats en deçà de 12dB de rapport signal sur bruit.

Les figures 6.2a et 6.2b illustrent la répartition des taux d'erreur binaire aberrants, respectivement pour des modulations 3RC d'indice 0.7 et 1REC d'indice 0.5, et pour un rapport  $E_b/N_0$  égal à 15dB. Rappelons que, dans le cas où les paramètres sont suppo-

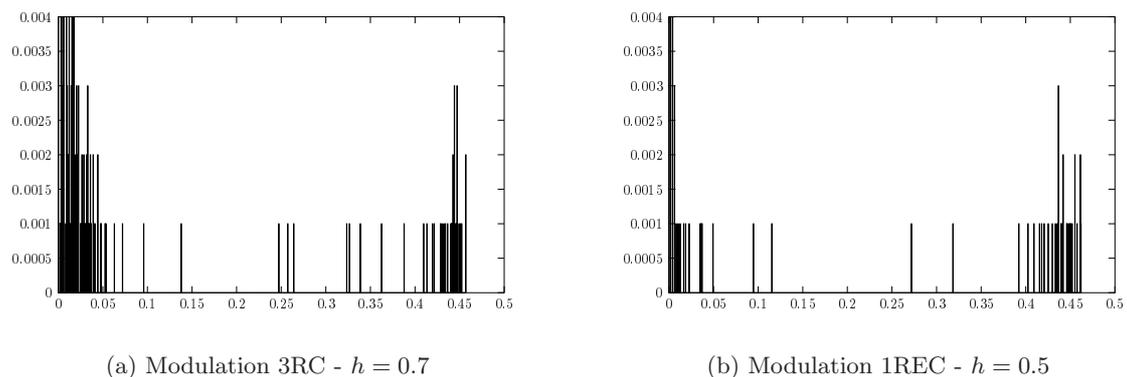


FIG. 6.2 – Répartition des taux d'erreur aberrants -  $E_b/N_0 = 15\text{dB}$

sés connus, les simulations du chapitre 3 avaient montré que 10 taux d'erreur binaire sur 1000 réalisations étaient supérieurs à 0.05, pour une modulation 3RC d'indice 0.7 et pour  $E_b/N_0 = 15\text{dB}$ . Cette fois, les estimateurs des paramètres entrent en jeu et on dénombre 40 échecs du même type. Dans le cas d'une modulation 1REC d'indice 0.5, le nombre

de taux d'erreur binaire supérieurs à 0.05 passe de 2 à 30 sur 1000 réalisations, selon que les paramètres sont connus ou estimés. Cette augmentation des échecs dans les deux cas est naturellement due aux fausses détections dont peuvent souffrir les estimateurs des paramètres. Les figures 6.3a et 6.3b représentent l'histogramme normalisé de l'erreur d'estimation commise sur la valeur de l'indice, respectivement pour des modulations 3RC d'indice 0.7 et 1REC d'indice 0.5. L'échelle choisie pour les figures permet d'observer la répartition des fausses détections. Nous observons qu'environ 40 réalisations sur 1000 produisent une erreur d'estimation de  $h$  supérieure à 0.025 dans le cas d'une modulation 3RC, et environ 20 sur 1000 dans le cas d'une modulation 1REC. Par ailleurs, nous pourrions

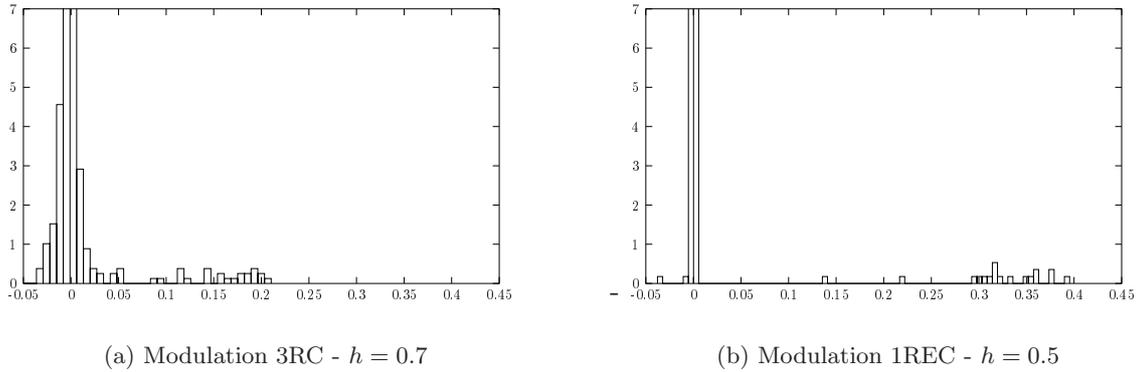


FIG. 6.3 – Histogramme normalisé de l'erreur d'estimation sur l'indice -  $E_b/N_0 = 15\text{dB}$

constater que le nombre de fausses détections commises sur les valeurs des paramètres  $T_s$  est du même ordre dans chaque cas. Cela est également vrai en ce qui concerne les fausses détections sur  $\delta f_0$ . Pour finir, les tableaux 6.1 et 6.2 représentent les taux d'erreur binaire moyens obtenus en excluant toutes les réalisations qui conduisent à un taux d'erreur binaire supérieur à 0.05. À titre de comparaison, nous rappelons également dans le même tableau les taux d'erreur obtenus dans le cas où les paramètres sont connus. Nous

$E_b/N_0$	20 dB	15 dB	10 dB
CMA - Paramètres inconnus	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$	-
CMA - Paramètres connus	$7 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$
Wiener - Paramètres connus	$3 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$

TAB. 6.1 – Taux d'erreur binaire moyens (hors réalisations catastrophiques) - Modulation 3RC -  $h = 0.7$

$E_b/N_0$	20 dB	15 dB	10 dB
CMA - Paramètres inconnus	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	-
CMA - Paramètres connus	$10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$
Wiener - Paramètres connus	$7 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-3}$

TAB. 6.2 – Taux d'erreur binaire moyens (hors réalisations catastrophiques) - Modulation 1REC -  $h = 0.5$

constatons que la méconnaissance des paramètres entraîne une dégradation sensible des

---

performances dans le cas d'une modulation 3RC d'indice 0.7. Cette dégradation est moins visible dans le cas d'une modulation 1REC d'indice 0.5.



---

# Conclusion

Ce travail de thèse a été consacré à la définition et à l'étude d'une chaîne de traitements de réception permettant de démoduler en aveugle un signal CPM binaire provenant d'un émetteur inconnu et distordu par un canal de propagation à trajets multiples. Les paramètres utilisés à l'émission sont supposés inconnus du récepteur et aucune séquence d'apprentissage n'est disponible. En nous basant sur la remarque que l'estimation de certains paramètres peut s'avérer délicate lorsque le canal de transmission n'a pas été compensé au préalable, nous avons retenu une approche consistant successivement à :

1. égaliser en aveugle l'effet d'un éventuel canal de propagation à trajets multiples ;
2. estimer les paramètres nécessaires au fonctionnement d'un algorithme d'extraction des symboles d'information.

Nous avons commencé par remarquer que la philosophie générale de l'égalisation dans le contexte des CPM diffère assez sensiblement de celle qui sous-tend l'égalisation des signaux modulés linéairement par des suites i.i.d.. Contrairement au cas de modulations linéaires classique, l'étape d'égalisation ne permet pas directement d'extraire les symboles mais dans le meilleur des cas de récupérer le signal que l'on aurait observé en l'absence de trajets multiples. De plus, la compensation du canal de transmission analogique n'est en règle générale pas envisageable théoriquement par le biais d'un égaliseur numérique, hormis dans le cas particulier de CPM à réponse complète échantillonnées au rythme symbole. Ceci est dû au fait que les modulations CPM sont à bande théoriquement illimitée. Bien entendu, la largeur de bande "effective" des signaux CPM est en pratique limitée. Par conséquent, en l'absence de bruit et si la fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée, il existe un filtre égaliseur numérique dont la sortie se rapproche autant que l'on veut du signal émis échantillonné à la même fréquence d'échantillonnage. En pratique, l'égalisation numérique de signaux CPM est donc tout à fait envisageable pour peu que la fréquence d'échantillonnage soit suffisante.

Étant donné que les signaux CPM sont de module constant, il semble au premier abord que l'algorithme du module constant, le CMA, soit une solution tout à fait désignée pour égaliser en aveugle le signal reçu. Il paraît en effet légitime d'imposer la condition de module constant en sortie de l'égaliseur quelle que soit la période d'échantillonnage choisie. Nous avons donc étudié les minima globaux du critère du module constant. Naturellement, une telle étude n'a de sens que dans la mesure où la technique d'égalisation choisie permet effectivement d'inverser le canal, ce qui n'est pas garanti lorsque l'on utilise un égaliseur numérique. Nous nous sommes donc placés dans un cadre théorique plus large, mais néanmoins équivalent lorsque la fréquence d'échantillonnage augmente : nous supposons que l'égaliseur agit *avant* l'échantillonnage (égaliseur analogique) et non *après* (égaliseur numérique). Dans ce contexte, nous avons alors cherché à caractériser les solutions du critère du module constant. Dans un premier temps, nous nous sommes placés dans le cas où la modulation CPM émise est à réponse complète : une formulation plus commode du

problème peut être énoncée et permet dans ce cas de mettre en évidence l'ensemble des solutions. Dans le cas de CPM à réponse partielle, nous nous sommes limités à exprimer une condition forte sur la forme que prend nécessairement tout signal de sortie de l'égaliseur qui serait de module constant, et nous avons complété ce résultat en mentionnant des exemples de familles de solutions. En particulier nous avons montré que le critère du module constant ne permet pas à coup sûr de compenser les trajets multiples. En revanche les résultats de simulations ont montré que l'algorithme du module constant (CMA) suivi d'un algorithme de synchronisation et de démodulation conduit dans la plupart des cas à des taux d'erreur très satisfaisants.

Nous nous sommes ensuite intéressés au problème de l'estimation aveugle des paramètres techniques de la modulation. Les résultats ci-dessus obtenus en matière d'égalisation ont été utilisés pour montrer qu'une méthode d'estimation aveugle de la période symbole, initialement proposée par [2] pour des modulations linéaires classiques, peut être adaptée au cas de modulations CPM.

Nous avons ensuite proposé un estimateur de l'indice de modulation et nous avons étudié ses performances dans le cas où le canal de transmission est supposé avoir été parfaitement compensé. L'approche est basée sur l'observation que tout signal CPM d'indice  $h$  élevé à la puissance  $1/h$  présente une composante déterministe sinusoïdale de période égale au double de la période symbole. Ceci n'est pas le cas pour une élévation à une puissance différente de  $1/h$ . Nous avons montré que l'erreur quadratique moyenne de cet estimateur converge vers zéro à la vitesse  $1/N^2$ , où  $N$  représente le nombre de symboles observés. Le rythme de convergence est donc deux fois plus rapide que dans le cas des rares estimateurs ayant été proposés auparavant. Nous avons en outre montré que, lorsque  $N$  tend vers l'infini, l'erreur d'estimation converge en loi vers une variable aléatoire non gaussienne, construite à partir d'un mouvement Brownien bidimensionnel. Signalons toutefois que cette approche requiert le déploiement de la phase du signal reçu, ce qui, en présence de bruit, peut conduire à des erreurs affectant l'estimation. L'étude asymptotique que nous avons menée est valable dans le cas où ces erreurs peuvent être négligées, c'est à dire pour des rapports signal sur bruit supérieurs à 12dB environ, d'après les simulations effectuées.

L'estimateur précédent suppose la connaissance préalable de la période symbole et du résidu de fréquence porteuse. Nous avons montré comment généraliser le procédé dans le cas contraire : nous obtenons alors un estimateur conjoint de l'indice, de la période symbole et du résidu de fréquence porteuse. Une étude asymptotique a permis de montrer que les estimateurs de la période symbole et du résidu de porteuse convergent à la vitesse  $1/N^{3/2}$ , et que l'erreur d'estimation vectorielle commise sur les trois paramètres converge vers une variable aléatoire construite à partir d'un mouvement brownien tridimensionnel.

Enfin, nous avons mis en œuvre la chaîne de réception complète et étudié ses performances par simulation.

Certains aspects de ce travail pourraient être prolongés. Ainsi, il serait utile de généraliser les techniques présentées et les analyses que nous en avons faites au cas d'un alphabet de symboles à plus de deux états. En outre, le problème de la séparation aveugle de signaux CPM dans un contexte multi-sources / multi-capteurs, reste un problème peu éclairci jusqu'ici, et il nous semble raisonnable de penser qu'une approche basée sur le critère du module constant devrait permettre de séparer des signaux CPM.

---

# Annexes



---

## Annexe A

# Article publié dans les actes de GLOBECOM 2003

### Contents

---

A.1	Introduction . . . . .	118
A.2	The proposed estimate . . . . .	120
A.3	Asymptotic analysis of the proposed estimate . . . . .	123
A.4	Simulations and results . . . . .	127

---

# Blind joint estimation of the technical parameters of continuous phase modulated signals

Pascal Bianchi, Philippe Loubaton, François Sirven

## Abstract

In this paper, a new non data aided estimator of the technical parameters of Continuous Phase Modulated (CPM) signals is proposed. It consists in estimating jointly the modulation index, the symbol period and the frequency offset. It is based on the following observations. Firstly, the inverse of the index is the smallest positive real number a CPM signal should be raised to in order to generate a deterministic harmonic signal; secondly, the frequencies of the harmonic signal are simply related to the symbol period and the carrier frequency. The asymptotic behavior of the estimation error is studied. If  $N$  is the number of signaling intervals, the estimate of the modulation index is shown to converge to a non Gaussian distribution at rate  $\frac{1}{N}$ , while the estimate of the frequency offset and the estimate of the symbol period converge at rate  $\frac{1}{N^{3/2}}$ . Simulations results sustain our theoretical claims.

## A.1 Introduction

Blind estimation of technical parameters characterizing the modulation used by a partially unknown transmitter is useful in certain civil or military applications. For instance, in the field of passive listening, certain modulation parameters should be estimated in order to identify the transmitter and to extract the transmitted information. This paper addresses such a problem in the context of continuous phase modulated (CPM) signals. The complex envelope  $s_a(t)$  of a CPM signal can be written as  $s_a(t) = \exp i\psi_a(t)$  where the phase  $\psi_a(t)$  of  $s_a(t)$  is given by

$$\psi_a(t) = \pi h \int_{-\infty}^t \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n g_a(u - nT_s) du \quad (\text{A.1})$$

$$= \pi h \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \phi_a(t - nT_s) \quad (\text{A.2})$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  is the symbol sequence. It is assumed that  $a_n = \pm 1$  for each  $n$ , and that the sequence is centered and independent identically distributed.  $T_s$  is the unknown symbol period. Function  $g_a(t)$ , classically called the shaping filter, is positive and non zero on the interval  $[0, LT_s]$ , where  $L$  is a positive integer.  $g_a(t)$  is normalized in such a way that  $\int_0^{LT_s} g_a(t) dt = 1$ . Therefore, function  $\phi_a(t)$  defined by  $\phi_a(t) = 0$  if  $t < 0$  and  $\phi_a(t) = \int_0^t g_a(s) ds$  satisfies  $0 \leq \phi_a(t) \leq 1$  if  $0 \leq t \leq LT_s$  and  $\phi_a(t) = 1$  for  $t \geq LT_s$ . Parameter  $h$  is called the **modulation index** and is therefore characterized by the fact that the phase variation induced by a symbol is equal to  $\pm\pi h$ . We finally note that if  $nT_s \leq t \leq (n+1)T_s$ , the phase  $\psi_a(t)$  of signal  $s_a(t)$  can be written as

$$\psi_a(t) = \pi h \left[ \sum_{k=-\infty}^{n-L} a_k \right] + \pi h \left[ \sum_{k=0}^{L-1} \phi_a(t - kT_s) a_{n-k} \right]. \quad (\text{A.3})$$

Now consider that a CPM signal corrupted by an additive white Gaussian noise  $w_a(t)$  has been detected at the receiver side, and assume that the carrier frequency has been roughly compensated. The complex envelope  $y_a(t)$  of the received signal can be written as follows :

$$y_a(t) = \alpha_a s_a(t - \tau) e^{2i\pi\delta f_0 t} + w_a(t). \quad (\text{A.4})$$

$\alpha_a$  represents an unknown complex gain,  $\tau$  is an unknown time delay and  $\delta f_0$  denotes an unknown frequency offset.

In this paper, we address the non data aided joint estimation of the modulation index  $h$ , the symbol period  $T_s$  and the frequency offset  $\delta f_0$ . As this contribution is motivated by applications to passive listening, we assume that the shaping filter is unknown.

We first mention that the use of the maximum likelihood criterion to estimate the unknown parameters is difficult to implement in case of CPM signals, as long as data symbols are unknown (see [43] for details). It is thus relevant to propose suboptimum estimators. Blind estimation of the symbol period  $T_s$  can be achieved by using traditional cyclic methods, which consist in detecting the smallest positive cyclic frequency of a well chosen non-linear function of the received signal  $y_a(t)$ . But these methods are known to be inappropriate when  $y_a(t)$  has a slight excess bandwidth. In our particular context, this means that cyclic methods are likely to fail when parameter  $L$  is large. On the other hand, a number of works have been devoted to the non data aided estimation of timing and frequency offset ([35], [36]) of CPM signals when every other parameters are assumed to be known. The problem of the estimation of the modulation index is comparatively less popular. Moreover, estimators proposed in [37] and [43] require the prior knowledge of the other parameters.

In section A.2, we introduce the proposed joint estimator of  $\boldsymbol{\theta}_0 = (h, T_s, \delta f_0)$ . It is based on the following observation. A strictly positive real number  $g$  is such that

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T E(y_a(t)^g) e^{-2i\pi\tilde{\alpha}t} dt \neq 0 \quad (\text{A.5})$$

for at least a certain frequency  $\tilde{\alpha}$  if and only if  $g$  is an integer multiple of  $g_0 = \frac{1}{h}$ . In other words,  $g_0 = \frac{1}{h}$  is the smallest positive real number for which  $t \rightarrow E(y_a(t)^g)$  contains sinusoidal components. Furthermore, the frequencies  $\tilde{\alpha}$  satisfying (A.5) for  $g = g_0$  are given by  $\tilde{\alpha} = \frac{2k+1}{2T_s} + g_0\delta f_0$  where  $k$  is an integer. This property is one of the result of the exhaustive study [25] of the cyclic properties of CPM signals. In section 4, we study the asymptotic performance of the proposed estimate  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = (\hat{h}_N, \hat{T}_N, \hat{\delta f}_N)$  of vector  $\boldsymbol{\theta}_0 = (h, T_s, \delta f_0)$ . We first study the noiseless case and show that  $(N(\hat{h}_N - h), N^{3/2}(\hat{T}_N - T_s), N^{3/2}(\hat{\delta f}_N - \delta f_0))$  converges in distribution toward a distribution constructed from a 3-dimensional Brownian motion. The estimate  $\hat{h}_N$  of the modulation index thus converges at rate  $\frac{1}{N}$ . This is in contrast with the estimate proposed in [37] which converges at rate  $\frac{1}{N^{1/2}}$ . The estimate  $\hat{T}_N$  of the symbol period converges at rate  $\frac{1}{N^{3/2}}$  and thus at the same rate as estimates based on cyclic methods (see [32]). Finally, the estimate  $\hat{\delta f}_N$  of the frequency offset  $\delta f_0$  also converges at rate  $\frac{1}{N^{3/2}}$ . It is worth noting that the practical implementation of the estimate requires to raise the received signal to non integer powers. Thus, the phase of the received signal must be unwrapped thanks to a procedure which can produce some errors in the presence of additive noise. These phase unwrapping errors are quite difficult to take into account in the asymptotic analysis of the performance. While the asymptotic results remains exact in the noiseless case, the study of the noisy case requires to neglect the influence of phase

unwrapping errors. In section A.4, we compare the theoretical asymptotic distributions with the empirical ones. We study the values of the signal to noise ratio for which our theoretical results allow to predicate the behavior of the estimate.

## A.2 The proposed estimate

### A.2.1 A cyclic property of CPM signals

The proposed estimate is based on a cyclic property of CPM signals which has been recently derived in [25].

**Proposition A.1 :** *Let  $r_a(t)$  be a CPM signal of modulation index  $f$ . Then,*

- *if  $f$  is not an integer, then  $E(r_a(t)) = 0$  for each  $t$  ;*
- *if  $f$  is a non zero even integer, function  $t \rightarrow E(r_a(t))$  is periodic of period  $T_s$  ;*
- *if  $f$  is an odd integer, function  $t \rightarrow E(r_a(t))$  is periodic of period  $2T_s$ .*

Now consider a CPM signal  $s_a(t)$  whose phase  $\psi_a(t)$  is given by (A.3). We denote by  $y_a(t)$  the received signal given by (A.4). For the sake of simplicity, we consider the noiseless case and we assume that the complex gain  $\alpha_a$  is equal to one :  $y_a(t) = s_a(t - \tau)e^{2i\pi\delta f_0 t}$ . In the sequel, we need to define signal  $y_a(t)^g$  for any positive real number  $g$ . This requires some care because when setting

$$y_a(t)^g = |y_a(t)|^g \exp(ig \operatorname{Arg}(y_a(t))) ,$$

one has to precise which particular determination of  $\operatorname{Arg}(y_a(t))$  is chosen. Recalling that  $y_a(t) = \exp i (\psi_a(t - \tau) + 2\pi\delta f_0 t)$ , we simply choose the determination

$$\operatorname{Arg}(y_a(t)) = \psi_a(t - \tau) + 2\pi\delta f_0 t , \quad (\text{A.6})$$

which can also be interpreted as the determination for which function  $t \rightarrow \operatorname{Arg}(y_a(t))$  is continuous. Using (A.6), the received signal  $y_a(t)$  raised to the power  $g$  can be written as :

$$y_a(t)^g = s_a(t - \tau)^g e^{2i\pi g \delta f_0 t} . \quad (\text{A.7})$$

where  $s_a(t)^g = \exp ig \psi_a(t)$ . Now consider that  $I_g$  and  $I_{\tilde{\alpha}}$  are two intervals such that  $I_g \subset ]0, 2g_0[$  and  $I_{\tilde{\alpha}} \subset ]\frac{3}{2T_s} + g_0\delta f_0, \frac{3}{2T_s} + g_0\delta f_0[$ . The following result can be directly derived from Proposition A.1.

**Proposition A.2 :** *For each  $(g, \tilde{\alpha}) \in I_g \times I_{\tilde{\alpha}}$ , condition (A.5) holds if and only if  $g = g_0$  and  $\tilde{\alpha} = \pm \frac{1}{2T_s} + g_0\delta f_0$ .*

**Proof :** We first notice that  $s_a(t - \tau)^g$  can be interpreted as a CPM signal of index  $gh$ . Using Proposition 1, we obtain that  $E(s_a(t - \tau)^g)$  is non zero only if  $g$  is an integer multiple of  $g_0$ . Using (A.7), we deduce from this that condition (A.5) holds only if  $g$  is an integer multiple of  $g_0$ . As the only multiple of  $g_0$  that belongs to  $I_g$  coincides with  $g_0$  itself, (A.5) implies that  $g = g_0$ . Since function  $t \rightarrow E(s_a(t - \tau)^{g_0})$  is periodic of period  $2T_s$ , it can be expanded as the following Fourier series :

$$E(s_a(t - \tau)^{g_0}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\lambda}_k e^{2i\pi k \frac{t}{2T_s}} .$$

Therefore, if  $\tilde{\alpha}$  can be written as  $\tilde{\alpha} = \frac{k}{2T_s} + g_0\delta f_0$  for a certain  $k \in \mathbb{Z}$ , the left-hand side of equation (A.5) is equal to  $\tilde{\lambda}_k$ . In every other cases, it is equal to zero. Moreover,  $\tilde{\lambda}_k$  is non

zero only if  $k$  is an odd integer : this is due to the fact that function  $t \rightarrow E(s_a(t - \tau)^{g_0})$ , apart from being periodic, also verify  $E(s_a(t + T - \tau)^{g_0}) = -E(s_a(t - \tau)^{g_0})$ . Thus (A.5) holds only if  $\tilde{\alpha}$  is such that  $\tilde{\alpha} = \frac{2k+1}{2T_s} + g_0\delta f_0$ , where  $k \in \mathbb{Z}$ . If  $\tilde{\alpha}$  moreover belongs to  $I_{\tilde{\alpha}}$ , (A.5) implies that  $\tilde{\alpha}$  coincides with  $\pm \frac{1}{2T_s} + g_0\delta f_0$ .

### A.2.2 Presentation of the proposed estimate

In practice, parameter  $\theta_0$  is estimated from a sampled version of the received signal. We thus introduce the following notations : we denote by  $T_e$  the sampling period, by  $y(k)$  the sampled version of the received signal i.e.  $y_a(kT_e)$ , and by  $s(k)$  the discrete-time signal  $s_a(kT_e - \tau)$  where  $\tau$  is an unknown time delay. It can be shown that the use of a large oversampling rate  $1/T_e$  is of practical interest because it makes the performance nearly independent from time delay  $\tau$ . In the sequel, we assume therefore that  $T_e \ll T_s$ . It is clear that both practical and theoretical behaviors of our estimates are nearly independent of the choice of  $T_e$  provided that  $T_e \ll T_s$ . In the following, we therefore develop our calculations in the case where  $T_e = T_s/M$ , where  $M$  is an integer because the derivations are technically easier to follow. Of course, in practice, it is impossible to choose such a sampling rate because  $T_s$  is unknown. From now on we denote by  $N$  the number of signaling intervals. The received samples are given for each  $k = 0 \dots NM - 1$  by  $y(k) = \alpha_a s(k) e^{2i\pi\Delta f_0 k} + w(k)$ , where  $\Delta f_0 = \delta f_0 T_e$  and where  $w(k)$  is a complex white Gaussian noise of variance  $\sigma^2$ .

We denote by  $r_N(g, \alpha)$  the following function :

$$r_N(g, \alpha) = \frac{1}{NM} \sum_{k=0}^{NM-1} \frac{y(k)^g}{|y(k)|^g} e^{-2i\pi\alpha k}. \quad (\text{A.8})$$

Note that  $\alpha \rightarrow r_N(g, \alpha)$  actually coincides with the periodogram of sequence  $(\frac{y(k)^g}{|y(k)|^g})$ . Now we put

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{T_e}{2T_s} + g_0\Delta f_0, \\ \beta_0 &= -\frac{T_e}{2T_s} + g_0\Delta f_0. \end{aligned}$$

Using Propositions A.1 and A.2, we obtain immediately that  $E(r_N(g_0, \alpha_0))$  and  $E(r_N(g_0, \beta_0))$  converge to non zero values as  $N \rightarrow \infty$ . As  $r_N(g, \alpha)$  converges almost surely towards  $E(r_N(g, \alpha))$  for each  $(g, \alpha)$ , this property suggests that the estimation of  $(g_0, \alpha_0)$  can be achieved by the maximization of  $|r_N(g, \alpha)|^2$  w.r.t.  $(g, \alpha)$ . Moreover, we notice that  $g_0$ ,  $\alpha_0$  and  $\beta_0$  are related to the parameters of interest by :  $h = 1/g_0$ ,  $T_s = T_e/(\alpha_0 - \beta_0)$  and  $\delta f_0 = (\alpha_0 + \beta_0)/(2g_0T_e)$ . We thus define cost function  $J_N(g, \alpha, \beta)$  by

$$J_N(g, \alpha, \beta) = |r_N(g, \alpha)|^2 + |r_N(g, \beta)|^2 \quad (\text{A.9})$$

and we propose to maximize  $J_N$  over a well chosen search domain. We put :  $(\hat{g}_N, \hat{\alpha}_N, \hat{\beta}_N) = \arg \max_{(g, \alpha, \beta)} J_N(g, \alpha, \beta)$ . The estimates of the technical parameters are finally given by  $\hat{h}_N = 1/\hat{g}_N$ ,  $\hat{T}_N = T_e/(\hat{\alpha}_N - \hat{\beta}_N)$  and  $\hat{\delta f}_N = (\hat{\alpha}_N + \hat{\beta}_N)/(2\hat{g}_N T_e)$ .

Of course, the maximization of  $J_N$  w.r.t.  $(g, \alpha, \beta)$  requires to define three relevant search intervals  $I_g$ ,  $I_\alpha$  and  $I_\beta$  in order to avoid ambiguities. Assume that the frequency offset  $\delta f_0$  is slight enough so that  $|g_0\delta f_0| < \frac{1}{2T_s}$  : this is also equivalent to  $\alpha_0 > 0$  and  $\beta_0 < 0$ . Proposition A.2 suggests to define search intervals such that  $I_g \subset ]0, 2g_0[$ ,  $I_\alpha \subset ]0, \frac{3T_e}{2T_s} + g_0\Delta f_0[$  and  $I_\beta \subset ]-\frac{3T_e}{2T_s} + g_0\Delta f_0, 0[$ . In this case, using Propositions A.1 and A.2, it can be shown that for each  $(g, \alpha, \beta) \in I_g \times I_\alpha \times I_\beta$ ,  $J_N(g, \alpha, \beta)$  converges to a non zero value as  $N \rightarrow \infty$  if and only if  $g = g_0$ ,  $\alpha = \alpha_0$  and  $\beta = \beta_0$ .

**Remarks :**

- At first glance, such a definition of search intervals may seem not so easy to do at the receiver side because the technical parameters are unknown. However, one may use an *a priori* information on  $\theta_0$ . Indeed, it is reasonable to conjecture that an information on the possible values of parameter  $h$  is available and that the symbol period and the frequency offset have been roughly estimated beforehand : a basic estimation of  $T_s$  can indeed be achieved by detecting the bandwidth of the received signal  $y_a(t)$ , while the frequency offset  $\delta f_0$  can be roughly estimated by noticing that the average of the instantaneous frequency of  $y_a(t)$  coincides with  $\delta f_0$ . We also recall that the relevancy of the definition of search intervals  $I_\alpha$  and  $I_\beta$  rests on the assumption that  $|g_0 \delta f_0| < \frac{1}{2T_s}$ . Since this assumption does not necessarily hold in practice, we propose firstly to estimate  $\delta f_0$  by using the average of the instantaneous frequency, secondly to compensate the frequency offset on the received signal and finally to refine the estimate of  $\delta f_0$  by using the present method.

- One could also replace  $\frac{y(k)}{|y(k)|}$  by  $y(k)$  in equation (A.8). However, the use of (A.8) provides better experimental results. This observation could be confirmed by the asymptotic analysis of the next section. Due to the lack of space, we do not discuss this issue.

**A.2.3 Practical implementation**

The practical implementation of the proposed estimate poses two problems.

- Function  $(g, \alpha, \beta) \rightarrow J_N(g, \alpha, \beta)$  is not convex. The maximization of  $J_N$  cannot be achieved directly by using a gradient search algorithm : an exhaustive search is required at first. We thus propose the following procedure so as to maximize  $J_N$ . We first evaluate the values taken by the 1-dimensional cost function  $g \rightarrow \max_{\alpha, \beta} J_N(g, \alpha, \beta)$  on a discrete grid of the search interval  $I_g$ . For a given  $g$ , the above function can be evaluated thanks to the following steps.

1. Function  $\alpha \rightarrow r_N(g, \alpha)$  is evaluated on a discrete grid by an FFT algorithm.
2.  $|r_N(g, \alpha)|^2$  is maximized w.r.t.  $\alpha$ , where  $\alpha$  belongs to the discrete FFT grid and to the search interval  $I_\alpha$ .
3. The point of the FFT grid which maximizes  $|r_N(g, \alpha)|^2$  is used to initialize a Newton maximization algorithm, in order to refine the value  $\max_\alpha |r_N(g, \alpha)|^2$ .

The same approach is used in order to maximize  $\beta \rightarrow |r_N(g, \beta)|^2$  w.r.t.  $\beta \in I_\beta$ . Repeating these steps for each  $g$  leads to an initial estimate of  $(g_0, \alpha_0, \beta_0)$  which can be used as the initial point of a gradient search algorithm.

- The main problem of the present estimate comes from the computation of sequence  $(y(k)^g)_{k=0, \dots, N-1}$  for each non integer  $g$  of the search interval  $I_g$ . This crucial step requires indeed to unwrap the phase of  $y$  adequately. We first address the noiseless case, for which  $y(k)$  coincides with  $\alpha_a s(k) e^{2i\pi \Delta f_0 k}$ . In order to obtain a consistent estimate of  $g_0$ , one has to select for each  $k$  the determination defined by  $\text{Arg}(y(k)) = \text{Arg}(\alpha_a) + \psi(k) + 2\pi \Delta f_0 k$ . Now this can be achieved by noticing that the phase variation between two consecutive samples is so that  $(\psi(k) + 2\pi \Delta f_0 k) - (\psi(k-1) + 2\pi \Delta f_0 (k-1)) < \pi$  for each  $k$ , as long as the oversampling factor is large enough. Therefore, assuming that the correct determination  $\text{Arg}(y(k-1))$  has been identified at time  $k-1$ ,  $\text{Arg}(y(k))$  is defined as the determination for which  $|\text{Arg}(y(k)) - \text{Arg}(y(k-1))|$  is minimum. In the noisy case, this unwrapping

procedure is still used, but the influence of the additive noise  $w(k)$  may induce some phase unwrapping errors. Numerical results of section A.4 illustrate the effect of such errors on the performance of the estimator.

### A.3 Asymptotic analysis of the proposed estimate

We now study the asymptotic behavior of the estimate of the technical parameters  $\hat{\theta}_N = (\hat{h}_N, \hat{T}_N, \hat{\delta f}_N)$ . For the sake of simplicity, we assume that  $\exp(i\pi h \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j) = 1$ . Using (A.3) and the fact that  $T_e = \frac{T_s}{M}$ , we obtain that for each  $n = 0 \dots N-1$  and for each  $m = 0 \dots M-1$ , the phase of the discrete time signal  $s(nM + m) = s_a((nM + m)T_e - \tau)$  can be written as :

$$\psi(nM + m) = \pi h \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j + \sum_{j=0}^{L-1} a_{n-j} \phi_{j,m} \right), \quad (\text{A.10})$$

where  $\phi_{j,m}$  is defined by  $\phi_{j,m} = \phi_a(jT_s + mT_s/M + T_s - \tau)$  and where we assume without restriction that  $0 \leq T_s - \tau < T_e$ .

#### A.3.1 The noiseless case

We first consider the noiseless case, i.e.  $y(k) = \alpha_a s(k) e^{2i\pi \Delta f_0 k}$  for each  $k = 0 \dots NM-1$ . As constant  $\alpha_a$  does not play any role in the following, we simply set  $\alpha_a = 1$  from now on in order to simplify the notations.

Before presenting the main results of this section, we first study the behavior of  $r_N(g_0, \alpha_0)$  in order to get some insights on the parameter which may influence the performance of the estimates. Recalling that  $\alpha_0 = \frac{1}{2M} + g_0 \Delta f_0$ ,  $r_N(g_0, \alpha_0)$  can be written as :

$$r_N(g_0, \alpha_0) = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^n \exp i g_0 \psi(nM + m) e^{-i\pi \frac{m}{M}} \quad (\text{A.11})$$

We also recall that  $\exp i\pi(\sum_{j=0}^{n-L} a_j)$  coincides with  $\pm(-1)^n$  and we assume that it is equal to  $(-1)^n$ . Using (A.10) and the fact that  $g_0 h = 1$ ,  $\exp i g_0 \psi(nM + m)$  can be written as

$$\begin{aligned} \exp i g_0 \psi(nM + m) &= (-1)^n \exp i\pi \left( \sum_{j=0}^{L-1} a_{n-j} \phi_{j,m} \right) \\ &= (-1)^n \prod_{j=0}^{L-1} (\cos(\pi \phi_{j,m}) + i a_{n-j} \sin(\pi \phi_{j,m})) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Expanding the left-hand side of (A.12), we easily obtain that :

$$(-1)^n \exp i g_0 \psi(nM + m) = \left( \prod_{j=0}^{L-1} \cos(\pi \phi_{j,m}) \right) + \epsilon(nM + m),$$

where  $\epsilon(nM + m)$  represents a zero mean random variable which only depends on data symbols  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-L+1}$ , and on coefficients  $\{\phi_{j,m}\}_{j=0 \dots L-1}$ . Now, replacing the above

expression of  $(-1)^n \exp ig_0 \psi(nM + m)$  into (A.11) leads to rewrite  $r_N(g_0, \alpha_0)$  as :

$$r_N(g_0, \alpha_0) = \lambda + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\epsilon}_1(n), \quad (\text{A.13})$$

where  $\tilde{\epsilon}_1(n)$  represents a zero mean random process defined by  $\tilde{\epsilon}_1(n) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \epsilon(nM + m) e^{-i\pi \frac{m}{M}}$  and where  $\lambda$  is the deterministic constant defined by

$$\lambda = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \prod_{j=0}^{L-1} \cos(\pi \phi_{j,m}) e^{-i\pi \frac{m}{M}}.$$

Using (A.13), it can easily be shown that  $r_N(g_0, \alpha_0)$  converges toward  $\lambda$  as  $N$  tends to infinity. In other words,  $|\lambda|^2$  can be interpreted as the asymptotic magnitude of the peaks of cost function  $J_N$ . The above result gives us already the insight that the modulus of  $\lambda$  has a crucial influence on the performance of the proposed estimate. In the sequel, we define  $\rho = |\lambda|$  and  $\varphi = \text{Arg}(\lambda)$ . We also need to define  $\tilde{\epsilon}_2(n) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \epsilon(nM + m) e^{i\pi \frac{m}{M}}$ .

In order to study the asymptotic behavior of the estimation errors  $\hat{g}_N - g_0$ ,  $\hat{T}_N - T_s$  and  $\hat{\delta f}_N - \delta f_0$ , it is quite useful to remark that the estimates can also be defined as  $(\hat{g}_N, \hat{T}_N, \hat{\delta f}_N) = \arg \max_{(g, T, \delta f)} \tilde{J}_N(g, T, \delta f)$ , where cost function  $\tilde{J}_N(g, T, \delta f)$  is equal to

$$\tilde{J}_N(g, T, \delta f) = J_N(g, \frac{T_e}{2T} + g\delta f, -\frac{T_e}{2T} + g\delta f). \quad (\text{A.14})$$

In particular, we note that  $\tilde{J}_N(g_0, T_s, \delta f_0) = J_N(g_0, \alpha_0, \beta_0)$ . The usual approach consists in expanding up to the second order the cost function  $\tilde{J}_N$  around  $(g_0, T_s, \delta f_0)$  and then to conjecture that the 3-dimensional estimation error has the same asymptotic behavior as the product  $-H_{0,N}^{-1} \nabla_0 \tilde{J}_N$ , where  $H_{0,N}$  and  $\nabla_0 \tilde{J}_N$  respectively represent the Hessian matrix and the gradient of  $\tilde{J}_N$  at point  $(g_0, T_s, \delta f_0)$ . It is thus sufficient to study separately the behaviors of the derivatives of function  $\tilde{J}_N$  at the point  $(g_0, T_s, \delta f_0)$ . After some algebra, one can show that each of the latter derivatives can be written as a function of the discrete time processes<sup>1</sup>  $\bar{\epsilon}_1(n) = \text{Im}(\tilde{\epsilon}_1(n)e^{-i\varphi} + \tilde{\epsilon}_2(n)e^{i\varphi})$ ,  $\bar{\epsilon}_2(n) = \text{Im}(\tilde{\epsilon}_1(n)e^{-i\varphi} - \tilde{\epsilon}_2(n)e^{i\varphi})$  and  $a_n$ . In order to illustrate this claim, we mention that the first derivative  $\frac{\partial \tilde{J}_N(g_0, T_s, \delta f_0)}{\partial g}$  of  $\tilde{J}_N$  w.r.t.  $g$  at point  $(g_0, T_s, \delta f_0)$  is equal to :

$$2\pi h\rho \left( \mu + \left( \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\sum_{j=0}^{n-L} a_j)}{N^{3/2}} \right) \left( \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \bar{\epsilon}_1(n)}{N^{1/2}} \right) - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right) \bar{\epsilon}_1(n) \right) + O_P\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right)$$

where  $\mu$  is the deterministic term defined by

$$\mu = -\frac{2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{j=0}^{L-1} \phi_{j,m} \sin \pi \phi_{j,m} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{L-1} \cos \pi \phi_{k,m} \right) \cos\left(\frac{\pi m}{M} + \varphi\right). \quad (\text{A.15})$$

<sup>1</sup>Notation Im stands for *imaginary part of*

Notation  $O_P$  stands for *bounded in probability*.

The asymptotic behavior of the estimates can be characterized by using the so-called functional central limit theorem. In order to introduce this result, we need to define on  $[0, 1]$  the following stochastic processes :

$$\begin{aligned} W_1^{(N)}(t) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor Nt \rfloor} a_{n-L} \\ W_2^{(N)}(t) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor Nt \rfloor} \bar{\epsilon}_1(n) \\ W_3^{(N)}(t) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor Nt \rfloor} \bar{\epsilon}_2(n) \end{aligned}$$

where  $\lfloor x \rfloor$  denotes the greatest integer less than or equal to  $x$ . We also define the 3-dimensional stochastic process  $\mathbf{W}^{(N)}(t) = (W_1^{(N)}(t), W_2^{(N)}(t), W_3^{(N)}(t))$ . The functional central limit theorem states that process  $\mathbf{W}^{(N)}(t)$  converges in distribution toward a 3-dimensional Brownian motion  $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), W_2(t), W_3(t))$  of covariance matrix  $\mathbf{\Gamma}$ , where

$$\mathbf{\Gamma} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} E \left( \begin{pmatrix} a_{n+k-L} \\ \bar{\epsilon}_1(n+k) \\ \bar{\epsilon}_2(n+k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-L}, \bar{\epsilon}_1(n), \bar{\epsilon}_2(n) \end{pmatrix} \right). \quad (\text{A.16})$$

We recall that a Brownian motion of covariance matrix  $\mathbf{\Gamma}$  is a zero mean Gaussian process such that  $E(\mathbf{W}(t)\mathbf{W}(s)^T) = \mathbf{\Gamma} \min(t, s)$ . In particular, this implies that if  $F$  is a functional defined on a well chosen space of functions defined on  $[0, 1]$ , then  $F(\mathbf{W}^{(N)})$  converges in distribution toward the random variable  $F(\mathbf{W})$ . In order to illustrate this claim, we mention for example that  $\int_0^1 W_1^{(N)}(t)dt = \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{n-L} a_j$  converges in distribution toward  $\int_0^1 W_1(t)dt$ . Using this kind of ideas, one can show the following theorem :

**Theorem A.1 :** *Denote by  $\xi$  and  $\chi$  the random variables defined by*

$$\begin{aligned} \xi &= \mu + \left( \int_0^1 W_1(t)dt \right) W_2(1) - \int_0^1 W_1(t) dW_2(t) \\ &\quad + 3 \left( \int_0^1 (1-2t)W_1(t)dt \right) \left( \int_0^1 (1-2t)dW_2(t) \right) \\ \chi &= \int_0^1 W_1(t)^2 dt - \left( \int_0^1 W_1(t)dt \right)^2 - 3 \left( \int_0^1 (1-2t)W_1(t)dt \right)^2. \end{aligned}$$

*Then  $(N(\hat{h}_N - h), N^{3/2}(\hat{T}_N - T_s), N^{3/2}(\delta\hat{f}_N - \delta f_0))$  converges in distribution toward the following random vector :*

$$\begin{pmatrix} -\frac{h}{2\pi\rho} \frac{\xi}{\chi} \\ \frac{3T_s}{\pi\rho} \int_0^1 (1-2t)dW_3(t) \\ -\frac{3h}{2\pi\rho T_s} \left( \int_0^1 (1-2t)dW_2(t) + \frac{\xi}{\chi} \int_0^1 (1-2t)W_1(t)dt \right) \end{pmatrix}^T$$

### Comments :

- The estimate  $\hat{h}_N$  of  $h$  converges at rate  $\frac{1}{N}$ . This is in contrast with the estimate proposed in [37] for which the convergence rate is equal to  $\frac{1}{N^{1/2}}$ . The estimate  $\hat{T}_N$  converges toward  $T_s$  at rate  $\frac{1}{N^{3/2}}$  and thus at the same rate as in case of traditional cyclic methods ([32]). Finally, the estimate  $\hat{\delta f}_N$  of  $\delta f_0$  also converges at rate  $\frac{1}{N^{3/2}}$ . Note also that the 3-dimensional asymptotic mean square error does not depend on the value of the frequency offset  $\delta f_0$ .

- The 3-dimensional estimation error is asymptotically proportional to  $\frac{1}{\rho^2}$ . As expected, the performance crucially depends on the value of  $\rho$  (and thus on the shaping filter  $g_a(t)$  used at the transmitter side).

- Random variable  $\int_0^1 (1-2t)dW_3(t)$  is a zero-mean Gaussian variable. This implies that the estimate  $\hat{T}_N$  of  $T_s$  is asymptotically unbiased and that the distribution  $N^{3/2}(\hat{T}_N - T_s)$  tends to a Gaussian distribution. On the other hand, the asymptotic behaviors of the estimates  $\hat{h}_N$  and  $\hat{\delta f}_N$  are rather unconventional.

- Using basic symmetric properties of the probability measure of Brownian motions, it can be shown that the estimate  $\hat{\delta f}_N$  of  $\delta f_0$  is also asymptotically unbiased. As we shall see in section A.4, the estimate  $\hat{h}_N$  of the modulation index is biased. The theoretical analysis of this bias requires more involved arguments and is not addressed in this paper due to the lack of space.

### A.3.2 The noisy case

We still assume without restriction that constant  $\alpha_a = 1$ , so that  $y(k) = e^{i(\psi(k)+2\pi\Delta f_0 k)} + w(k) = e^{i(\psi(k)+2\pi\Delta f_0 k)}(1 + \tilde{w}(k))$  where  $\tilde{w}(k) = e^{-i(\psi(k)+2\pi\Delta f_0 k)}w(k)$ . As  $w(k)$  is complex Gaussian and independent of  $e^{i\psi(k)}$ , it is easily seen that  $\tilde{w}(k)$  is still complex Gaussian and independent of  $e^{i\psi(k)}$ . We put  $1 + \tilde{w}(k) = \rho(k)e^{i\delta(k)}$  where  $\delta(k) \in [-\pi, \pi[$ .  $\rho(k)$  is Rice distributed, while the probability distribution of  $\delta(k)$  has an even (well known) probability density. As mentioned in subsection A.2.3, the calculation of  $y(k)^g$  requires to unwrap the phase of  $y(k)$ . The additive noise may produce some phase unwrapping errors which are unfortunately very difficult to take into account. A rigorous extension of the above asymptotic analysis seems therefore difficult. However, Theorem A.1 may be extended if phase unwrapping errors are neglected, i.e. if it is assumed that the unwrapped phase of  $y(k)$  coincides with the sequence  $\psi(k) + 2\pi\Delta f_0 k + \delta(k)$  for each  $k$ . Using the same approach as in the previous subsection, we obtain after some algebra that vector  $(N(\hat{h}_N - h), N^{3/2}(\hat{T}_N - T_s), N^{3/2}(\hat{\delta f}_N - \delta f_0))$  converges in distribution toward the following random vector :

$$\left( \begin{array}{c} -\frac{h}{2\pi\rho} \frac{\xi_{no}}{\chi} \\ \frac{3T_s}{\pi\rho} \int_0^1 (1-2t)dW_{3,no}(t) \\ -\frac{3h}{2\pi\rho T_s} \left( \int_0^1 (1-2t)dW_{2,no}(t) + \frac{\xi_{no}}{\chi} \int_0^1 (1-2t)W_1(t)dt \right) \end{array} \right)^T$$

where random variable  $\xi_{no}$  is given by :

$$\begin{aligned} \xi_{no} = & \mu - \rho \frac{E(\delta(k) \sin(g_0\delta(k)))}{E(\cos(g_0\delta(k)))} + \left( \int_0^1 W_1(t)dt \right) W_{2,no}(1) \\ & - \int_0^1 W_1(t)dW_{2,no}(t) + 3 \int_0^1 (1-2t)W_1(t)dt \int_0^1 (1-2t)dW_{2,no}(t). \end{aligned}$$

Random process  $\mathbf{W}_{no}(t) = (W_1(t), W_{2,no}(t), W_{3,no}(t))$  represents a 3-dimensional Brownian motion. Due to the lack of space, we just mention that its covariance matrix  $\mathbf{\Gamma}_{no}$  depend on the signal-to-noise ratio. More details will be given in an extended version of the present paper.

## A.4 Simulations and results

In this section, we compare theoretical predictions to empirical results. We first give the parameters of the simulations. The number  $N$  of signaling intervals is set to  $N = 1000$ . The time delay  $\tau$  is equal to  $\tau = 0.21 T_s$ . The additive noise is assumed to be white in the frequency interval  $[-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}]$ , so that its variance  $\sigma^2$  is given by  $\sigma^2 = \frac{2}{T_s} N_0$ . Results presented in the sequel are obtained by using either IREC modulated signals (i.e. the shaping filter  $g_a(t)$  is given by  $g_a(t) = \frac{1}{T}$  on  $[0, T[$  and  $g_a(t) = 0$  elsewhere) or 3RC modulated signals (i.e. the shaping filter is the raised-cosine of order  $L = 3$ , given by  $g_a(t) = \frac{1}{LT_s}(1 - \cos \frac{2\pi t}{LT_s})\mathbf{I}_{0 \leq t \leq LT_s}$ ). The modulation index  $h$  is equal to  $h = 0.7$ . The unknown frequency offset is set to  $\delta f_0 = 0$  without restriction. Finally, the oversampling factor  $M$  is equal to  $M = 4$ . In order to evaluate function  $J_N$  and thus to estimate the technical parameters, we use the practical implementation described in subsection A.2.3. More precisely, function  $g \rightarrow \max_{\alpha, \beta} J_N(g, \alpha, \beta)$  is evaluated on a grid whose step is equal to  $10^{-5}$ . For each point of this grid, we use 4 iterations of a Newton algorithm to calculate the values of  $\alpha$  and  $\beta$  that maximize  $J_N(g, \alpha, \beta)$ . Finally, 200 iterations of a gradient search algorithm are used to refine the estimates.

The following figures represent the empirical and theoretical distributions of the estimation errors  $N(\hat{h}_N - h)/h$  and  $N^{3/2}(\delta \hat{f}_N - \delta f_0)$  in different simulation contexts. Empirical distributions are given by normalized histograms which are based on 2000 realizations of random variables  $\hat{h}_N$  and  $\delta \hat{f}_N$ . Theoretical distributions correspond to the dotted line. Figures A.1 and A.2 represents the distribution errors in case of 3RC signals respectively for  $E_b/N_0 = 25\text{dB}$  and  $E_b/N_0 = 15\text{dB}$ . We first observe that the histograms fit to

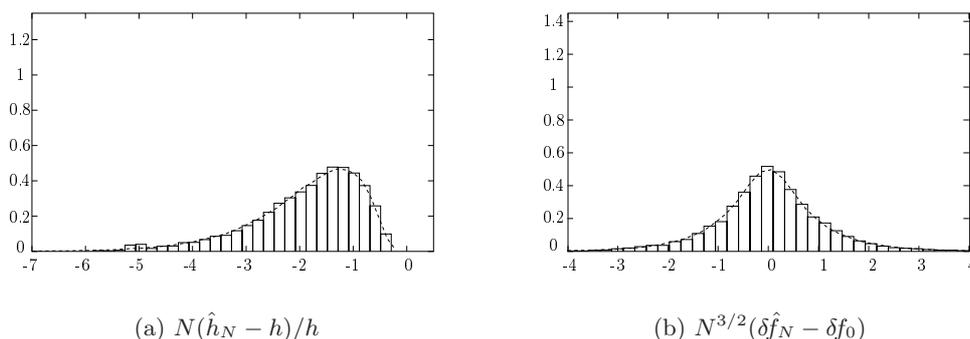
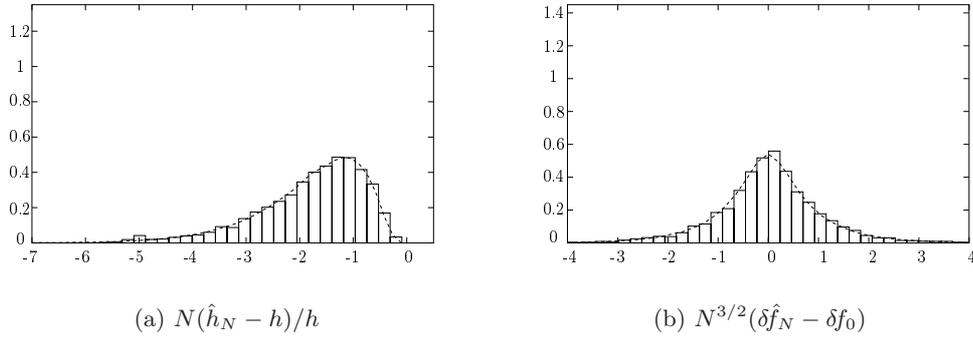
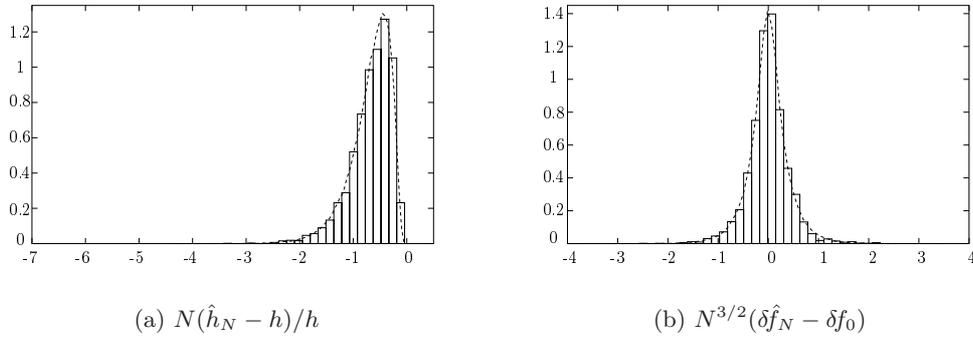


FIG. A.1 – Histograms of the estimation error and limit pdf - 3RC signals -  $E_b/N_0 = 25\text{dB}$

the theoretical limit distribution for both estimates. The performance obtained either for  $E_b/N_0 = 25\text{dB}$  and  $E_b/N_0 = 15\text{dB}$  is almost the same : in case of 3RC signals, the performance is quite insensitive to the noise level as long as phase unwrapping errors do not occur. These simulation results also confirm that the estimate  $\delta \hat{f}_N$  is unbiased and that the estimate  $\hat{h}_N$  is biased. Figure A.3 shows that the performance of the joint estimation

FIG. A.2 – Histograms of the estimation error and limit pdf - 3RC signals -  $E_b/N_0 = 15\text{dB}$ FIG. A.3 – Histograms of the estimation error and limit pdf - 1REC signals -  $E_b/N_0 = 25\text{dB}$ 

is better in case of 1REC signals than in case of 3RC signals.

Using other simulation results, we observe that when  $E_b/N_0$  is less than 12dB, the approximations formulated in order to derive the limit distribution are no longer valid because of a significant number of phase unwrapping errors. In this case, theoretical predictions do not fit to the empirical results.

Furthermore, simulations have shown that a large number  $N$  of observed signaling intervals is required so that the empirical distribution of  $N^{3/2}(\hat{T}_N - T_s)$  fits to theoretical results. Indeed,  $N^{3/2}(\hat{T}_N - T_s)$  coincides with the sum of a random variable which has the same distribution as  $\frac{3T_s}{\pi\rho} \int_0^1 (1-2t)dW_{3,no}(t)$  and of second term which converges toward zero at rate  $\frac{1}{N^{1/2}}$ . Intuitively, the empirical distribution of the estimation error shall thus coincide with the theoretical distribution only if this second term can be neglected w.r.t. the random variable  $\frac{3T_s}{\pi\rho} \int_0^1 (1-2t)dW_{3,no}(t)$ . Now we observed that this random variable may have a very slight variance (less than  $10^{-5}$  in all our simulation contexts). Therefore, it is clear that the empirical distribution of  $\hat{T}_N$  shall not fit to the theoretical results for  $N = 1000$ . Nevertheless, the asymptotic study of section A.3 can be extended so as to predict the behavior of  $\hat{T}_N$  in the most general case. This issue will be addressed in further works.

---

## Annexe B

# Annexe relative au chapitre 3

### B.1 Preuve de la proposition 3.1

Considérons le cas où  $T_e/T_s = \frac{p}{q}$ , avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux. Puisque  $z_a(t)$  est cyclostationnaire, la fonction  $n \rightarrow E(|z(n)|^2 - 1) = E(|z_a(n\frac{p}{q}T_s)|^2 - 1)$  est périodique de période  $q$ . En choisissant  $N_{obs}$  multiple de  $q$ , on peut montrer que la somme figurant dans le membre de droite de (3.8) se réduit à une somme sur  $q$  coefficients :

$$\frac{1}{N_{obs}} \sum_{n=0}^{N_{obs}-1} E(|z(n)|^2 - 1)^2 = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} E\left(|z_a(k\frac{p}{q}T_s)|^2 - 1\right)^2.$$

En faisant tendre  $N_{obs}$  vers l'infini et écrivant que la limite  $\mathcal{J}_{T_e}(G)$  est nulle par hypothèse, nous obtenons que pour tout  $k \in \{0, \dots, q-1\}$ ,  $E\left(|z_a(k\frac{p}{q}T_s)|^2 - 1\right)^2 = 0$ . Démontrons maintenant que les deux ensembles suivants sont égaux :

$$\left\{ k\frac{p}{q} - \left[ k\frac{p}{q} \right] / k \in \{0, \dots, q-1\} \right\} = \left\{ \frac{k}{q} / k \in \{0, \dots, q-1\} \right\}, \quad (\text{B.1})$$

où  $[\cdot]$  désigne la partie entière. Soit  $k \in \{0, \dots, q-1\}$ . La division euclidienne de  $kp$  par  $q$  conduit directement à :  $\frac{kp}{q} = b + \frac{r}{q}$ , où  $r$  est un entier de  $\{0, \dots, q-1\}$ . Comme  $0 \leq \frac{r}{q} < 1$ ,  $b$  coïncide avec  $\left[ k\frac{p}{q} \right]$ , si bien que  $k\frac{p}{q} - \left[ k\frac{p}{q} \right]$  est bien un élément du second ensemble apparaissant dans l'équation (B.1). Démontrons maintenant la réciproque. Soit  $k \in \{0, \dots, q-1\}$ . La relation de Bezout appliquée aux entiers  $p$  et  $q$  permet d'introduire deux entiers  $u$  et  $v$  tels que  $1 = up + vq$ . En multipliant cette égalité par  $\frac{k}{q}$ , on obtient :  $\frac{k}{q} = (ku)\frac{p}{q} + vk$ . Or  $0 \leq \frac{k}{q} < 1$ , donc  $vk$  coïncide avec  $\left[ (ku)\frac{p}{q} \right]$ , ce qui implique que  $\frac{k}{q}$  appartient au premier ensemble apparaissant dans l'équation (B.1).

Maintenant que nous avons démontré (B.1), la conclusion est immédiate. Nous écrivons que  $E\left(|z_a(k\frac{p}{q}T_s)|^2 - 1\right)^2 = 0$  quel que soit  $k \in \{0, \dots, q-1\}$ . Par cyclostationnarité de  $z_a(t)$ , la propriété reste vraie pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Ainsi, pour tout entier  $k$ ,  $z_a(k\frac{T_s}{q})$  est de module 1, presque sûrement.

Il reste à traiter le cas où  $\frac{T_e}{T_s}$  est irrationnel. La démonstration qui suit provient de [2] et nous ne faisons ici que l'adapter à notre contexte. Commençons par remarquer que la fonction  $t \rightarrow E(|z_a(t)|^2 - 1)^2$  est périodique de période  $T_s$ . Elle est développable en série

de Fourier de la manière suivante : pour tout  $t$ ,

$$E(|z_a(t)|^2 - 1)^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi k \frac{t}{T_s}}, \quad (\text{B.2})$$

où  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  représente les coefficients de Fourier de la fonction. Nous admettons en outre que la fonction  $t \rightarrow E(|z_a(t)|^2 - 1)^2$  est continuellement dérivable. Ceci implique que le membre de droite de (B.2) converge uniformément. Par conséquent, pour  $N_{obs}$  fixé,

$$\frac{1}{N_{obs}} \sum_{n=0}^{N_{obs}-1} E(|z_a(nT_e)|^2 - 1)^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \left( \frac{1}{N_{obs}} \frac{1 - e^{2i\pi k \frac{T_e}{T_s} N_{obs}}}{1 - e^{2i\pi k \frac{T_e}{T_s}}} \right). \quad (\text{B.3})$$

Comme  $\frac{T_e}{T_s}$  est irrationnel,  $\frac{1}{N_{obs}} \frac{1 - e^{2i\pi k \frac{T_e}{T_s} N_{obs}}}{1 - e^{2i\pi k \frac{T_e}{T_s}}}$  tend vers zéro quand  $N_{obs}$  tend vers l'infini dès que  $k \neq 0$ . Par conséquent, (B.3) converge vers :

$$\mathcal{J}_{T_e}(G) = c_0 = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} E(|z_a(t)|^2 - 1)^2 dt.$$

Or  $\mathcal{J}_{T_e}(G) = 0$  par hypothèse, ce qui implique que la fonction  $t \rightarrow E(|z_a(t)|^2 - 1)$  est nulle presque partout sur l'intervalle  $[0, T_s]$  (et donc sur  $\mathbb{R}$  par cyclostationnarité de  $z_a(t)$ ). Par conséquent,  $z_a(t)$  est de module constant égal à 1 sur  $\mathbb{R}$ , presque sûrement.

## B.2 CPM à réponse complète : preuve du Résultat 3.2

On suppose que l'indice  $h$  de la modulation n'est pas un multiple de  $\frac{1}{2}$ . On considère la suite de pseudo-symboles  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  définie par (2.8) Soit  $f(z) = \sum_k f_k z^{-k}$  la fonction de transfert d'un filtre tel que le signal  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  défini pour tout  $n$  par  $z(n) = [f(z)]x(n)$  soit de module constant :

$$\forall n, |z(n)| = 1 \text{ p.s.} \quad (\text{B.4})$$

La condition ci-dessus implique le lemme suivant :

**Lemme B.1 :** Soient  $n_0$  et  $n_1$  deux entiers tels que  $n_0 \leq n_1$ . Pour toute séquence binaire  $\alpha = [\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_1}]^T$ ,

$$E(|z(n)|^2 / [a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots, a_{n_1}]^T = \alpha) = 1. \quad (\text{B.5})$$

**Preuve :** L'ensemble des suites de symboles  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifiant  $a_n = \alpha_n$  pour tout  $n$  compris entre  $n_0$  et  $n_1$  a une mesure de probabilité strictement positive. Par conséquent, la condition (B.4) reste valable en sachant  $[a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots, a_{n_1}]^T = \alpha$ , ce qui implique immédiatement (B.5).

La démarche est alors la suivante. Pour toute séquence  $\alpha$  fixée, l'équation (B.5) fournit une équation faisant intervenir les coefficients inconnus  $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  du filtre  $f(z)$ . En appliquant (B.5) pour des séquences  $\alpha$  bien choisies, on peut alors montrer que les coefficients  $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  sont nuls, excepté pour (au plus) trois entiers  $k$  consécutifs.

Soit  $n$  un entier fixé. Soient  $n_0$  et  $n_1$  deux entiers quelconques tels que  $n_1 \geq n_0 + 2$ . Nous rappelons d'abord que la représentation de Laurent permet d'écrire  $z(n)$  sous la

forme  $z(n) = \sum_k f_{n-k}x(k)$ , où les pseudo-symboles  $(x(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  sont définis pour tout entier  $k$  par :

$$x(k) = \exp \left[ i\pi h \sum_{j=-\infty}^k a_j \right]. \quad (\text{B.6})$$

On peut exprimer  $|z(n)|^2$  de la manière suivante :

$$|z(n)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_{n-k}|^2 |x(k)|^2 + 2\text{Re} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{k-1} f_{n-k} f_{n-k'}^* x(k)x(k')^* \right].$$

Notons d'abord que  $|x(k)|^2 = 1$  pour tout entier  $k$ . De plus, la définition (B.6) permet d'écrire le produit  $x(k)x(k')^*$  pour  $k' < k$  de la manière suivante :

$$x(k)x(k')^* = \exp \left[ i\pi h \sum_{j=k'+1}^k a_j \right].$$

Soit maintenant une séquence binaire  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_1}]^T$ . Grâce à l'expression précédente de  $|z(n)|^2$ , on peut facilement écrire la condition (B.5) ainsi :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 + 2\text{Re} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{k-1} f_{n-k} f_{n-k'}^* \gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}) \right] = 1, \quad (\text{B.7})$$

où  $\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha})$  est défini pour tous entiers  $k$  et  $k'$  tels que  $k' < k$  par :

$$\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}) = E \left( x(k)x(k')^* / [a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots, a_{n_1}]^T = \boldsymbol{\alpha} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$= E \left( \exp \left[ i\pi h \sum_{j=k'+1}^k a_j \right] / [a_{n_0}, \dots, a_{n_1}]^T = \boldsymbol{\alpha} \right). \quad (\text{B.9})$$

Il est important de remarquer que  $\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha})$  dépend de  $\alpha_{n_0}$  seulement si  $k' \leq n_0 - 1$  et si  $k \geq n_0$ . Dès lors, notre approche consiste à employer l'équation (B.7) pour différentes séquences binaire. Nous commençons par "faire varier" la première composante de la séquence, soit  $\alpha_0$  : si  $\boldsymbol{\alpha}$  est une séquence binaire fixée, (B.7) est valide aussi bien pour  $\boldsymbol{\alpha}$  que pour la séquence  $\boldsymbol{\alpha}' = [-\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_1}]^T$ . En utilisant en outre le fait que la différence  $\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}) - \gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}')$  est non nulle seulement si  $k' \leq n_0 - 1$  et  $k \geq n_0$ , la soustraction terme à terme des deux équations ainsi obtenues conduit à :

$$\text{Re} \left[ \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{n_0-1} f_{n-k} f_{n-k'}^* (\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}) - \gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}')) \right] = 0. \quad (\text{B.10})$$

Après avoir fait varier la première composante  $\alpha_{n_0}$  de  $\boldsymbol{\alpha}$ , nous faisons maintenant varier la dernière,  $\alpha_{n_1}$ , dans l'équation (B.10). Puisque (B.10) est valide pour toutes séquences  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\alpha}'$  ne différant que par leur première composante  $\alpha_{n_0}$ , l'équation reste vraie pour les deux séquences  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = [\alpha_{n_0}, \dots, \alpha_{n_1-1}, -\alpha_{n_1}]^T$  et  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}' = [-\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_1-1}, -\alpha_{n_1}]^T$  :

$$\text{Re} \left[ \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{n_0-1} f_{n-k} f_{n-k'}^* (\gamma_{kk'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) - \gamma_{kk'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}')) \right] = 0. \quad (\text{B.11})$$

En soustrayant terme à terme les équations (B.10) et (B.11), on obtient alors :

$$\Re \left[ \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{n_0-1} f_{n-k} f_{n-k'}^* ((\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}) - \gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}')) - (\gamma_{kk'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) - \gamma_{kk'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'))) \right] = 0. \quad (\text{B.12})$$

En utilisant (B.9), on remarque en outre que  $\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha})$  dépend de  $\alpha_{n_1}$  seulement si  $k \geq n_1$ . Par conséquent, les différences  $(\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}) - \gamma_{kk'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}))$  et  $(\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}') - \gamma_{kk'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'))$  sont non nulles seulement si  $k \geq n_1$ . Ceci implique que le coefficient

$$(\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}) - \gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}')) - (\gamma_{kk'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) - \gamma_{kk'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'))$$

est non nul seulement si  $k \geq n_1$ . Grâce à cette remarque, l'égalité (B.12) peut être simplifiée de la manière suivante :

$$\Re \left[ \sum_{k=n_1}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{n_0-1} f_{n-k} f_{n-k'}^* ((\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}) - \gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}')) - (\gamma_{kk'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) - \gamma_{kk'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'))) \right] = 0. \quad (\text{B.13})$$

Afin d'exprimer (B.13) en fonction des valeurs  $\alpha_{n_0}, \dots, \alpha_{n_1}$ , il est nécessaire d'évaluer  $\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha})$  pour tous entiers  $k$  et  $k'$  tels que  $k \geq n_1$  et  $k' \leq n_0 - 1$ . Grâce à (B.9), on obtient

$$\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}) = E \left( \exp \left[ i\pi h \sum_{j=k'+1}^{n_0-1} a_j \right] \right) \exp \left[ i\pi h \sum_{j=n_0}^{n_1} \alpha_j \right] E \left( \exp \left[ i\pi h \sum_{j=n_1+1}^k a_j \right] \right). \quad (\text{B.14})$$

**Remarque B.1 :** Dans l'équation (B.14), nous posons comme d'habitude :

$$\sum_{j=k'+1}^{n_0-1} a_j = 0 \quad \text{si } k' = n_0 - 1, \quad \text{et} \quad \sum_{j=n_1+1}^k a_j = 0 \quad \text{si } k = n_1.$$

On peut exprimer simplement (B.14) en notant que

$$E \left( \exp \left[ i\pi h \sum_{j=k'+1}^{n_0-1} a_j \right] \right) = \prod_{j=k'+1}^{n_0-1} E(e^{i\pi h a_j}) = (\cos \pi h)^{n_0-k'-1}.$$

En posant par commodité  $C = \cos \pi h$ ,  $\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha})$  peut enfin s'écrire :

$$\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}) = C^{n_0-k'-1} C^{k-n_1} \exp \left( i\pi h \sum_{j=n_0}^{n_1} \alpha_j \right). \quad (\text{B.15})$$

L'expression ci-dessus permet de vérifier que

$$\begin{aligned} & (\gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}) - \gamma_{kk'}(\boldsymbol{\alpha}')) - (\gamma_{kk'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) - \gamma_{kk'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}')) = \\ & C^{n_0-k'-1} C^{k-n_1} \exp \left( i\pi h \sum_{j=n_0+1}^{n_1-1} \alpha_j \right) (2i\alpha_{n_0} \sin \pi h)(2i\alpha_{n_1} \sin \pi h). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

En réinjectant (B.16) dans l'équation (B.13) et en notant que le produit

$$C^{m_0-n_1-1}(2i\alpha_{n_0} \sin \pi h)(2i\alpha_{n_1} \sin \pi h)$$

est un nombre réel et non nul, on aboutit à :

$$\Re \left[ \left( \sum_{k'=-\infty}^{n_0-1} f_{n-k'} C^{-k'} \right)^* \left( \sum_{k=n_1}^{\infty} f_{n-k} C^k \right) \exp \left( i\pi h \sum_{j=n_0+1}^{n_1-1} \alpha_j \right) \right] = 0. \quad (\text{B.17})$$

On utilise ensuite le lemme suivant :

**Lemme B.2 :** *Soit  $Z$  un nombre complexe. Si  $h$  n'est pas multiple de  $\frac{1}{2}$  et si pour tout  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ ,  $\Re [Z e^{i\pi h \epsilon}] = 0$ , alors  $Z = 0$ .*

Puisque  $n_1 \geq n_0 + 2$ , la somme qui constitue l'argument de l'exponentielle dans l'équation précédente comporte au moins un terme. On peut donc utiliser le lemme précédent en choisissant pour  $Z$  la valeur suivante

$$\left( \sum_{k'=-\infty}^{n_0-1} f_{n-k'} C^{-k'} \right)^* \left( \sum_{k=n_1}^{\infty} f_{n-k} C^k \right) \exp \left( i\pi h \sum_{j=n_0+1}^{n_1-2} \alpha_j \right).$$

Grâce au lemme B.2, l'égalité (B.17) implique que le produit ci dessus est nul. Ceci équivaut à :

$$\sum_{k=-\infty}^{n_0-1} f_{n-k} C^{-k} = 0 \quad (\text{B.18})$$

$$\text{ou } \sum_{k=n_1}^{\infty} f_{n-k} C^k = 0. \quad (\text{B.19})$$

Soulignons en outre que la propriété ci-dessus reste vraie quels que soient les entiers  $n_0$  et  $n_1$  tels que  $n_1 \geq n_0 + 2$ . Deux cas sont alors à traiter :

**Cas n°1 :**

On fait l'hypothèse qu'il existe un entier  $N_0 \in \mathbb{Z}$  tel que  $\sum_{k=-\infty}^{N_0-1} f_{n-k} C^{-k} \neq 0$ .

Alors pour tout  $n_1 \geq N_0 + 2$ ,

$$\sum_{k'=n_1}^{\infty} f_{n-k'} C^k = 0. \quad (\text{B.20})$$

Et comme l'équation (B.20) est également vraie en remplaçant  $n_1$  par  $n_1 + 1$ , on obtient :

$$f_{n-n_1} = \frac{1}{C^{n_1}} \left( \sum_{k'=n_1}^{\infty} f_{n-k'} C^k - \sum_{k'=n_1+1}^{\infty} f_{n-k'} C^k \right) = 0. \quad (\text{B.21})$$

Et plus généralement,  $f_{n-k} = 0$  pour tout  $k \geq N_0 + 2$ . Il est alors légitime de poser  $N_1 = \max\{k / f_{n-k} \neq 0\}$ . Cette définition de  $N_1$  conduit directement à :

$$\sum_{k=N_1}^{\infty} f_{n-k} C^k \neq 0,$$

si bien que pour tout entier  $n_0$  vérifiant  $N_1 \geq n_0 + 2$ ,

$$\sum_{k=-\infty}^{n_0-1} f_{n-k} C^{-k} = 0.$$

Grâce à des arguments similaires aux précédents, on conclut immédiatement que  $f_{n-k} = 0$  pour tout  $k \leq N_1 - 3$ . Finalement, seuls les trois coefficients consécutifs  $f_{n-N_1-2}$ ,  $f_{n-N_1-1}$ ,  $f_{n-N_1}$  sont susceptibles d'être non nuls.

### Cas n°2 :

Supposons au contraire que pour tout entier  $n_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $\sum_{k=-\infty}^{n_0-1} f_{n-k} C^{-k} = 0$ .

Alors, pour tout  $n_0$  :

$$f_{n-n_0+1} = \frac{1}{C^{-n_0+1}} \left( \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} f_{n-k} C^{-k} - \sum_{k=-\infty}^{n_0-2} f_{n-k} C^{-k} \right) = 0. \quad (\text{B.22})$$

$f(z)$  est alors le filtre nul. Or ceci est rendu impossible grâce à la condition de module un. Le cas n°2 ne se produit pas.



Nous avons donc démontré qu'au plus trois coefficients consécutifs du filtre  $f(z)$  sont susceptibles d'être non nuls. Désormais nous supposons par commodité qu'il s'agit des coefficients  $f_0$ ,  $f_1$  et  $f_2$ . Il reste donc à identifier ces trois coefficients.

Nous supposons sans restriction que  $f_0$  est non nul. On écrit que le module de  $f_0 x(n) + f_1 x(n-1) + f_2 x(n-2)$  est égal à 1, pour tout  $n$ , presque sûrement. Pour cela, rappelons que pour tout  $n$ ,

$$\begin{aligned} x(n-1) &= \exp(i\pi h a_{n-1}) x(n-2) \\ x(n) &= \exp(i\pi h (a_n + a_{n-1})) x(n-2), \end{aligned}$$

et qu'en outre,  $x(n-2)$  est de module un. Ceci permet d'écrire que pour tout  $n$  et pour toute séquence binaire  $[\alpha_n, \alpha_{n-1}]^T$ ,

$$|f_0 \exp(i\pi h (\alpha_n + \alpha_{n-1})) + f_1 \exp(i\pi h \alpha_{n-1}) + f_2|^2 = 1. \quad (\text{B.23})$$

A ce stade, on pourrait appliquer l'équation précédente pour les quatre séquences binaires  $[\alpha_n, \alpha_{n-1}]^T$  possibles et en déduire un système d'équations du second ordre. Bien que la résolution de ce système soit tout à fait possible, nous avons choisi de présenter une approche moins directe mais plus "légère" en calculs.

L'égalité (B.23) implique qu'il existe une fonction  $\Theta(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$  des deux bits  $\alpha_{n-1}$  et  $\alpha_n$  telle que

$$f_0 \exp(i\pi h (\alpha_n + \alpha_{n-1})) + f_1 \exp(i\pi h \alpha_{n-1}) + f_2 = \exp(i\Theta(\alpha_{n-1}, \alpha_n)). \quad (\text{B.24})$$

En exprimant  $\Theta(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$  sous la forme suivante :

$$\Theta(\alpha_{n-1}, \alpha_n) = \Theta(\alpha_{n-1}, -1) + (\Theta(\alpha_{n-1}, 1) - \Theta(\alpha_{n-1}, -1)) \frac{1 + \alpha_n}{2},$$

on constate qu'il existe deux fonctions  $\Theta'(\alpha_{n-1})$  et  $\Theta''(\alpha_{n-1})$  de  $\alpha_{n-1}$  telles que :

$$\Theta(\alpha_{n-1}, \alpha_n) = \Theta'(\alpha_{n-1}) + \Theta''(\alpha_{n-1})\alpha_n.$$

En appliquant la décomposition ci-dessus, nous écrivons maintenant l'équation (B.24) pour les deux séquences  $[1, \alpha_{n-1}]^T$  et  $[-1, \alpha_{n-1}]^T$ , où  $\alpha_{n-1}$  est quelconque. La soustraction terme à terme des deux équations ainsi obtenues conduit à :

$$2if_0 \sin \pi h e^{i\pi h \alpha_{n-1}} = 2i \sin \Theta''(\alpha_{n-1}) e^{i\Theta'(\alpha_{n-1})}. \quad (\text{B.25})$$

En divisant chaque membre de l'équation ci-dessus par  $2ie^{i\pi h \alpha_{n-1}}$  et en écrivant le coefficient  $f_0 \sin \pi h$  sous sa forme polaire  $f_0 \sin \pi h = \rho e^{i\varphi}$ , on voit que pour tout  $\alpha_{n-1} \in \{-1, +1\}$ ,

$$\sin(\Theta''(\alpha_{n-1})) \exp(i\Theta'(\alpha_{n-1}) - i\pi h \alpha_{n-1}) = \rho e^{i\varphi}. \quad (\text{B.26})$$

Autrement dit, le membre de gauche de l'égalité ci-dessus ne dépend pas de  $\alpha_{n-1}$ . Puisque  $f_0$  est non nul (soit  $\rho \neq 0$ ), cela suppose que le module et l'argument de ce nombre ne dépendent pas de  $\alpha_{n-1}$ . Notons que le signe de  $\sin \Theta''(\alpha_{n-1})$  est inconnu : identifier les modules et les arguments des deux membres de (B.26) nécessite quelques précautions. Il existe une fonction  $\epsilon(\alpha_{n-1})$  prenant ses valeurs dans l'ensemble  $\{-1, +1\}$  telle que :

$$\exp(i\Theta'(\alpha_{n-1}) - i\pi h \alpha_{n-1}) = \epsilon(\alpha_{n-1}) e^{i\varphi}. \quad (\text{B.27})$$

En réinjectant l'équation ci-dessus dans (B.26) et en multipliant chaque membre de l'égalité par  $\epsilon(\alpha_{n-1})$ , il apparaît que  $\sin(\Theta''(\alpha_{n-1})) = \epsilon(\alpha_{n-1}) \rho$ . Notons au passage que  $\rho$  doit être inférieur à 1 pour que l'équation précédente puisse être réalisée. On pose  $\theta = \arcsin(\rho)$ . Selon la valeur de  $\alpha_{n-1}$ ,  $\Theta''(\alpha_{n-1})$  coïncide avec  $\epsilon(\alpha_{n-1})\theta$  ou avec  $\pi - \epsilon(\alpha_{n-1})\theta$ , modulo  $2\pi$ . On désigne alors par  $\epsilon'(\alpha_{n-1})$  la fonction égale à 1 lorsque  $\Theta''(\alpha_{n-1}) = \epsilon(\alpha_{n-1})\theta$  modulo  $2\pi$ , et égale à  $-1$  dans le cas contraire. Cette définition permet d'exprimer  $\Theta''(\alpha_{n-1})$  de la manière suivante<sup>1</sup> :

$$\Theta''(\alpha_{n-1}) = \epsilon(\alpha_{n-1})\theta + (\pi - 2\epsilon(\alpha_{n-1})\theta) \frac{1 - \epsilon'(\alpha_{n-1})}{2} \quad [2\pi] \quad (\text{B.28})$$

$$= \pi \frac{1 - \epsilon'(\alpha_{n-1})}{2} + \epsilon(\alpha_{n-1})\epsilon'(\alpha_{n-1})\theta \quad [2\pi]. \quad (\text{B.29})$$

On note  $\tilde{\epsilon}(\alpha_{n-1}) = \epsilon(\alpha_{n-1})\epsilon'(\alpha_{n-1})$ . La fonction  $\tilde{\epsilon}(\alpha_{n-1})$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{-1, +1\}$ . Grâce à l'équation ci-dessus, on peut exprimer  $\exp(i\Theta''(\alpha_{n-1})\alpha_n)$  pour tout  $\alpha_n \in \{-1, +1\}$ . Remarquons d'abord que

$$\exp\left(i\pi \frac{1 - \epsilon'(\alpha_{n-1})}{2} \alpha_n\right) = \epsilon'(\alpha_{n-1})$$

quelle que soit la valeur de  $\alpha_n$ . On obtient donc :

$$\exp(i\Theta''(\alpha_{n-1})\alpha_n) = \epsilon'(\alpha_{n-1}) \exp(i\theta \tilde{\epsilon}(\alpha_{n-1})\alpha_n). \quad (\text{B.30})$$

Les égalités (B.27) et (B.30) conduisent directement à :

$$\begin{aligned} f_0 \exp(i\pi h(\alpha_n + \alpha_{n-1})) + f_1 \exp(i\pi h \alpha_{n-1}) + f_2 \\ = \epsilon(\alpha_{n-1})\epsilon'(\alpha_{n-1}) \exp(i\varphi + i\pi h \alpha_{n-1} + i\theta \tilde{\epsilon}(\alpha_{n-1})\alpha_n) \\ = \tilde{\epsilon}(\alpha_{n-1}) \exp(i\varphi + i\pi h \alpha_{n-1} + i\theta \tilde{\epsilon}(\alpha_{n-1})\alpha_n). \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

<sup>1</sup>La notation  $[2\pi]$  signifie *modulo*  $2\pi$ .

L'égalité ci-dessus est valable pour toute séquence binaire  $[\alpha_{n-1}, \alpha_n]^T$ . On peut facilement démontrer le petit lemme qui suit :

**Lemme B.3 :** Soit  $\epsilon(\alpha)$  une fonction de l'ensemble  $\{-1, +1\}$  dans  $\{-1, +1\}$ . Alors il existe un élément  $\delta \in \{-1, +1\}$  tel que

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \{-1, +1\}, \quad \epsilon(\alpha) = \delta, \\ \text{ou bien } \forall \alpha \in \{-1, +1\}, \quad \epsilon(\alpha) = \delta\alpha. \end{aligned}$$

On distingue alors deux cas selon l'expression de  $\tilde{\epsilon}(\alpha_{n-1})$ .

### Cas n°1

Supposons que  $\tilde{\epsilon}(\alpha_{n-1})$  soit une constante :  $\tilde{\epsilon}(\alpha_{n-1}) = \delta$ , où  $\delta \in \{-1, +1\}$ . Nous posons  $\varphi' = \varphi$  si  $\delta = 1$  et  $\varphi' = \varphi + \pi$  si  $\delta = -1$ . Nous posons également  $\theta' = \delta\theta$ , si bien que (B.31) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} f_0 \exp(i\pi h(\alpha_n + \alpha_{n-1})) + f_1 \exp(i\pi h\alpha_{n-1}) + f_2 = \\ \exp(i\varphi' + i\pi h\alpha_{n-1} + i\theta'\alpha_n). \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

On remarque maintenant que :

$$\exp(i\theta'\alpha_n) = \frac{\sin \theta'}{\sin \pi h} e^{i\pi h\alpha_n} + \frac{\sin(\pi h - \theta')}{\sin \pi}.$$

En réinjectant cette expression dans (B.32), on constate que pour tout  $\alpha_n$  et pour tout  $\alpha_{n-1}$  :

$$\left( f_0 - \frac{\sin \theta'}{\sin \pi h} e^{i\varphi'} \right) \exp(i\pi h(\alpha_n + \alpha_{n-1})) + \left( f_1 - \frac{\sin(\pi h - \theta')}{\sin \pi h} e^{i\varphi'} \right) \exp(i\pi h\alpha_{n-1}) + f_2 = 0.$$

On utilise alors le lemme suivant, dont la démonstration ne présente pas de difficulté :

**Lemme B.4 :** Si  $Z_1$  et  $Z_2$  sont deux nombres complexes tels que pour tout  $\epsilon \in \{-1, +1\}$ ,  $Z_1 + Z_2 e^{i\pi h\epsilon} = 0$ , alors  $Z_1 = Z_2 = 0$ .

En appliquant une première fois le lemme ci-dessus, on obtient que

$$f_0 - \frac{\sin \theta'}{\sin \pi h} e^{i\varphi'} = 0. \quad (\text{B.33})$$

et

$$\left( f_1 - \frac{\sin(\pi h - \theta')}{\sin \pi h} e^{i\varphi'} \right) \exp(i\pi h\alpha_{n-1}) + f_2 = 0.$$

L'équation ci-dessus étant par ailleurs valable pour toute valeur de  $\alpha_{n-1}$ , le même lemme peut être appliqué une seconde fois, si bien que :

$$f_1 - \frac{\sin(\pi h - \theta')}{\sin \pi h} e^{i\varphi'} = 0, \quad (\text{B.34})$$

$$f_2 = 0. \quad (\text{B.35})$$

Pour résumer, nous avons donc démontré l'existence de deux réels  $\varphi'$  et  $\theta'$  tels que :

$$\begin{cases} f_0 = \frac{\sin \theta'}{\sin \pi h} e^{i\varphi'}, \\ f_1 = \frac{\sin(\pi h - \theta')}{\sin \pi h} e^{i\varphi'}, \\ f_2 = 0. \end{cases} \quad (\text{B.36})$$

Réciproquement, on peut facilement montrer que tout filtre vérifiant l'expression ci-dessus produit une sortie de module constant. Il ne nous reste plus qu'à démontrer que  $\theta'$  peut être choisi dans l'intervalle  $[0, \pi[$ . Si  $\theta'$  appartient à  $[-\pi, 0[$ , on pose  $\theta' = \theta'' - \pi$  et  $\varphi'' = \varphi' + \pi$ . Alors on peut toujours écrire les coefficients  $f_0$ ,  $f_1$  et  $f_2$  comme en (B.36) en remplaçant  $\theta'$  et  $\varphi'$  par  $\theta''$  et  $\varphi''$ .

### Cas n°2

Supposons au contraire que  $\tilde{\epsilon}(\alpha_{n-1})$  peut être mis sous la forme :  $\tilde{\epsilon}(\alpha_{n-1}) = \delta \alpha_{n-1}$ , où  $\delta \in \{-1, +1\}$ . Nous posons  $\varphi' = \varphi$  si  $\delta = 1$  et  $\varphi' = \varphi + \pi$  si  $\delta = -1$ . Nous posons également  $\theta' = \delta\theta$ , si bien que (B.31) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} f_0 \exp(i\pi h(\alpha_n + \alpha_{n-1})) + f_1 \exp(i\pi h\alpha_{n-1}) + f_2 = \\ \alpha_{n-1} \exp(i\varphi' + i\pi h\alpha_{n-1} + i\theta'\alpha_{n-1}\alpha_n). \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Comme précédemment, nous utilisons l'équation ci-dessus pour différentes valeurs de  $\alpha_{n-1}$  et  $\alpha_n$ . Les inconnues  $f_0$ ,  $f_1$  et  $f_2$  peuvent être exprimées en fonction des paramètres  $\theta'$  et  $\varphi'$  en combinant les équations ainsi obtenues. Comme précédemment, nous utilisons (B.37) successivement avec  $\alpha_n = 1$  puis  $\alpha_n = -1$ . La soustraction terme à terme des deux équations conduit à :

$$2i \sin \pi h f_0 e^{i\pi h\alpha_{n-1}} = \alpha_{n-1} e^{i\varphi'} e^{i\pi h\alpha_{n-1}} 2i \sin(\theta'\alpha_{n-1}),$$

soit

$$f_0 = \frac{\sin \theta'}{\sin \pi h} e^{i\varphi'}. \quad (\text{B.38})$$

L'expression de  $f_2$  peut être obtenue de la manière suivante. On multiplie chaque membre de (B.37) par  $\exp(-i\pi h\alpha_{n-1})$  :

$$f_0 e^{i\pi h\alpha_n} + f_1 + f_2 e^{-i\pi h\alpha_{n-1}} = \alpha_{n-1} \exp(i\varphi' + i\theta'\alpha_{n-1}\alpha_n). \quad (\text{B.39})$$

On utilise l'équation ci-dessus pour les valeurs  $\alpha_{n-1} = 1$  et  $\alpha_{n-1} = -1$  et on soustrait les deux résultats terme à terme :

$$-2i \sin \pi h f_2 = e^{i\varphi'} \left( e^{i\theta'\alpha_n} + e^{-i\theta'\alpha_n} \right), \quad (\text{B.40})$$

ce qui conduit à :

$$f_2 = i \frac{\cos \theta'}{\sin \pi h} e^{i\varphi'}. \quad (\text{B.41})$$

L'inconnue  $f_1$  s'obtient alors en remplaçant  $f_0$  et  $f_2$  respectivement par (B.38) et (B.41) dans l'expression (B.39) :

$$f_1 = \frac{e^{-i\theta'}}{i \tan \pi h} e^{i\varphi'}. \quad (\text{B.42})$$

Nous avons donc démontré l'existence de deux réels  $\theta'$  et  $\varphi'$  appartenant à l'intervalle  $[-\pi, \pi[$  tels que les coefficients  $f_0$ ,  $f_1$  et  $f_2$  vérifient les égalités (B.38), (B.42) et (B.41) respectivement. Ces égalités correspondent bien à celles du résultat (3.2). On peut facilement montrer que la réciproque est vraie, i.e. que les filtres à trois coefficients  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ , définis comme précédemment, produisent effectivement une sortie de module un. Il nous reste alors à montrer que  $\theta'$  peut être choisi dans l'intervalle  $[0, \pi[$ . Dans le cas où  $\theta'$  est dans  $[-\pi, 0[$ , il suffit de poser  $\theta'' = \theta' + \pi$  et  $\varphi'' = \varphi' + \pi [2\pi]$ . On vérifie alors que les expressions (B.38), (B.42) et (B.41) restent valables en remplaçant  $\theta'$  et  $\varphi'$  par  $\theta''$  et  $\varphi''$  respectivement.

### B.3 CPM à réponse partielle : preuve du Résultat 3.4

Nous utilisons une approche similaire à celle de l'annexe B.2.

Nous supposons que l'indice  $h$  de la modulation n'est pas un multiple de  $\frac{1}{2}$  et que la longueur  $L$  du filtre de mise en forme est supérieure ou égale à 2. Rappelons ici le modèle à temps discret (3.58) : le signal de sortie  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  s'écrit pour tout  $n$  :

$$z(n) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} [f_\nu(z)] x_\nu(n), \quad (\text{B.43})$$

où les  $2^{L-1}$  suites de pseudo-symboles  $((x_\nu(n))_{n \in \mathbb{Z}})_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  sont définies pour tout  $\nu$  par :

$$\forall n, \quad x_\nu(n) = \exp \left[ i\pi h \left( \sum_{k=-\infty}^{n-L} a_k + \sum_{k \in \nu} a_{n-k} + a_n \right) \right]. \quad (\text{B.44})$$

Pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , on pose  $f_\nu(z) = \sum_k f_{\nu,k} z^{-k}$ . L'équation (B.43) équivaut à :

$$z(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} f_{\nu,n-k} x_\nu(k). \quad (\text{B.45})$$

On cherche alors à caractériser les coefficients  $(f_{\nu,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  tels que :

$$\forall n, \quad |z(n)| = 1 \quad \text{p.s.} \quad (\text{B.46})$$

Soit  $n$  un entier fixé. Quels que soient les entiers  $n_0$  et  $n_1$ , le lemme B.1 implique que pour toute séquence binaire  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{n_0}, \dots, \alpha_{n_1}]^T$ , l'équation suivante est vraie :

$$E \left( |z(n)|^2 / [a_{n_0}, \dots, a_{n_1}]^T = \boldsymbol{\alpha} \right) = 1. \quad (\text{B.47})$$

La démarche est alors la suivante : en injectant (B.45) dans (B.47), on obtient une équation faisant intervenir les valeurs  $\alpha_{n_0}, \dots, \alpha_{n_1}$ . La démonstration consiste alors à combiner les équations obtenues pour des valeurs bien choisies de la séquence binaire  $\boldsymbol{\alpha}$ .

On peut exprimer  $|z(n)|^2$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} |z(n)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{(\nu, \nu') \in \mathcal{P}_L^2} f_{\nu,n-k} f_{\nu',n-k}^* x_\nu(k) x_{\nu'}(k)^* \right) + \\ &\quad 2\text{Re} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{k-1} \left( \sum_{(\nu, \nu') \in \mathcal{P}_L^2} f_{\nu,n-k} f_{\nu',n-k'}^* x_\nu(k) x_{\nu'}(k')^* \right) \right]. \end{aligned}$$

De plus, (B.44) permet d'écrire le produit  $x_\nu(k) x_{\nu'}(k')^*$  pour  $k' \leq k$  de la manière suivante :

$$x_\nu(k) x_{\nu'}(k')^* = \exp \left[ i\pi h \left( \sum_{j=k'-L+1}^{k-L} a_j + \sum_{j \in (0, \nu)} a_{k-j} - \sum_{j \in (0, \nu')} a_{k'-j} \right) \right].$$

Soit maintenant une séquence binaire  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_1}]^T$ . Grâce à l'expression précédente de  $|z(n)|^2$ , on peut facilement écrire la condition (B.5) ainsi :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{(\nu, \nu') \in \mathcal{P}_L^2} f_{\nu,n-k} f_{\nu',n-k}^* \gamma_{kk}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}) \\ &+ 2\text{Re} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{k-1} \sum_{(\nu, \nu') \in \mathcal{P}_L^2} f_{\nu,n-k} f_{\nu',n-k'}^* \gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}) \right] = 1, \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

où pour tous  $\nu$  et  $\nu'$  de  $\mathcal{P}_L$  et pour tous entiers  $k$  et  $k'$  tels que  $k' \leq k$  :

$$\begin{aligned} \gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}) &= E\left(x_\nu(k)x_{\nu'}(k')^* / \boldsymbol{\alpha}\right) \\ &= E\left(\exp\left[i\pi h\left(\sum_{j=k'-L+1}^{k-L} a_j + \sum_{j \in \nu} a_{k-j} + a_k - \sum_{j \in \nu'} a_{k'-j} - a_{k'}\right)\right] / \boldsymbol{\alpha}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Dans cette expression,  $E(\cdot / \boldsymbol{\alpha})$  représente l'espérance conditionnelle  $E(\cdot / [a_{n_0}, \dots, a_{n_1}]^T = \boldsymbol{\alpha})$ .

Nous considérons maintenant deux entiers  $n_0$  et  $n_1$  tels que

$$n_1 \geq n_0 + 2L.$$

Comme nous l'avons fait dans le cas des CPM à réponse complète, nous employons maintenant l'équation (B.48) pour différentes séquences binaires. Considérons la séquence :

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{n_0}, \dots, \alpha_{n_1}]^T,$$

où  $\alpha_{n_0}, \dots, \alpha_{n_1}$  sont des éléments quelconques de  $\{-1, +1\}$ . Nous commençons par "faire varier" la première composante de la séquence ci-dessus. À cette fin, nous considérons la séquence binaire  $\boldsymbol{\alpha}'$  qui ne diffère de  $\boldsymbol{\alpha}$  que par sa première composante :

$$\boldsymbol{\alpha}' = [-\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_1}]^T.$$

Nous écrivons maintenant que l'équation (B.48) est valable aussi bien pour la séquence  $\boldsymbol{\alpha}$  que pour  $\boldsymbol{\alpha}'$ , et nous soustrayons terme à terme les deux équations ainsi obtenues. Afin d'exprimer le plus simplement possible le résultat, nous remarquons grâce à (B.49) que  $\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha})$  et  $\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}')$  dépendent de  $\alpha_{n_0}$  seulement si  $k' \leq n_0 + L - 1$  et  $k \geq n_0$  : par conséquent, la différence  $\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}) - \gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}')$  est non nulle seulement si  $k' \leq n_0 + L - 1$  et  $k \geq n_0$ . Finalement la soustraction terme à terme des deux équations conduit à :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=n_0}^{n_0+L-1} \sum_{(\nu, \nu') \in \mathcal{P}_L^2} f_{\nu, n-k} f_{\nu', n-k}^* (\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}) - \gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}')) \\ &+ 2\text{Re} \left[ \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{\min(n_0+L-1, k-1)} \sum_{(\nu, \nu') \in \mathcal{P}_L^2} f_{\nu, n-k} f_{\nu', n-k'}^* (\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}) - \gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}')) \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Après avoir fait varier la première composante de la séquence binaire, nous faisons maintenant varier la dernière dans l'équation ci-dessus. Pour cela, considérons deux séquences binaires  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$  et  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'$  telles que  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$  (resp.  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'$ ) ne diffère de  $\boldsymbol{\alpha}$  (resp.  $\boldsymbol{\alpha}'$ ) que par la dernière composante :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\alpha}} &= [\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_1-1}, -\alpha_{n_1}]^T \\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}}' &= [-\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_1-1}, -\alpha_{n_1}]^T. \end{aligned}$$

Nous écrivons ensuite que l'équation (B.50) est valable aussi bien pour le couple de séquences  $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}')$  que pour  $(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}')$  :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n_0}^{n_0+L-1} \sum_{(\nu, \nu') \in \mathcal{P}_L^2} f_{\nu, n-k} f_{\nu', n-k}^* (\gamma_{kk}^{\nu\nu'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) - \gamma_{kk}^{\nu\nu'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}')) \\ & + 2\text{Re} \left[ \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{\min(n_0+L-1, k-1)} \sum_{(\nu, \nu') \in \mathcal{P}_L^2} f_{\nu, n-k} f_{\nu', n-k'}^* (\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) - \gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}')) \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

La soustraction terme à terme des équations (B.50) et (B.51) conduit à :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n_0}^{n_0+L-1} \sum_{(\nu, \nu') \in \mathcal{P}_L^2} f_{\nu, n-k} f_{\nu', n-k}^* \delta_{kk}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}', \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}') \\ & + 2\text{Re} \left[ \sum_{k=n_0}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{\min(n_0+L-1, k-1)} \sum_{(\nu, \nu') \in \mathcal{P}_L^2} f_{\nu, n-k} f_{\nu', n-k'}^* \delta_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}', \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}') \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

où le coefficient  $\delta_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}', \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}')$  est défini par :

$$\delta_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}', \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}') = (\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}) - \gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}')) - (\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) - \gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}')). \quad (\text{B.53})$$

L'équation (B.52) peut être simplifiée en observant la chose suivante. Le coefficient  $\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha})$  dépend de  $\alpha_{n_1}$  seulement si  $k \geq n_1$ . Par conséquent,  $\delta_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}', \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}')$  est non nul seulement pour  $k \geq n_1$ . Puisqu'en outre  $n_1$  est choisi de telle sorte que  $n_1 \geq n_0 + 2L > n_0 + L - 1$ , on constate en particulier que le premier terme du membre de gauche de l'équation (B.52) est nul. On obtient finalement à partir de (B.50) :

$$\text{Re} \left[ \sum_{k=n_1}^{\infty} \sum_{k'=-\infty}^{n_0+L-1} \sum_{(\nu, \nu') \in \mathcal{P}_L^2} f_{\nu, n-k} f_{\nu', n-k'}^* \delta_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}', \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}') \right] = 0. \quad (\text{B.54})$$

Il reste désormais à évaluer les coefficients  $\delta_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}', \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}')$  pour tout couple  $(\nu, \nu')$  de sous-ensembles de  $\{1, \dots, L-1\}$  et pour  $k' \leq n_0 + L - 1$  et  $k \geq n_1$ . Pour cela, nous commençons par exprimer  $\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha})$  à partir de (B.49). Le fait que  $n_1$  et  $n_0$  soient choisis tels que  $n_1 \geq n_0 + 2L$ , permet d'écrire  $\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha})$  sous la forme d'un produit de trois facteurs, chacun de ces facteurs dépendant d'une sous-séquence de  $\boldsymbol{\alpha}$  différente. On pose :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_0 &= [\alpha_{n_0}, \dots, \alpha_{n_0+L-1}]^T \\ \boldsymbol{\alpha}_1 &= [\alpha_{n_1-L+1}, \dots, \alpha_{n_1}]^T. \end{aligned}$$

Quels que soient les entiers  $k$  et  $k'$  tels que  $k' \leq n_0 + L - 1$  et  $k \geq n_1$ , on peut factoriser  $\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha})$  de la manière suivante :

$$\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}) = u_{k'}^{\nu'}(\boldsymbol{\alpha}_0) \exp \left( i\pi h \sum_{j=n_0+L}^{n_1-L} \alpha_j \right) v_k^{\nu}(\boldsymbol{\alpha}_1), \quad (\text{B.55})$$

où pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$  et pour tout  $k \leq n_0 + L - 1$ ,

$$u_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_0) = E \left( \exp \left[ i\pi h \left( \sum_{j=k-L+1}^{n_0+L-1} a_j - \sum_{j \in \nu} a_{k-j} - a_k \right) \right] / \boldsymbol{\alpha}_0 \right), \quad (\text{B.56})$$

et pour tout  $k \geq n_1$ ,

$$v_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_1) = E \left( \exp \left[ i\pi h \left( \sum_{j=n_1-L+1}^{k-L} a_j + \sum_{j \in \nu} a_{k-j} + a_k \right) \right] / \boldsymbol{\alpha}_1 \right). \quad (\text{B.57})$$

En posant :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}'_0 &= [-\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_0+L-1}]^T \\ \boldsymbol{\alpha}'_1 &= [\alpha_{n_1-L+1}, \dots, \alpha_{n_1-1}, -\alpha_{n_1}]^T, \end{aligned}$$

on peut écrire les coefficients  $\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}')$ ,  $\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$  et  $\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}')$  de façon similaire.

$$\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}') = u_{k'}^{\nu'}(\boldsymbol{\alpha}'_0) \exp \left( i\pi h \sum_{j=n_0+L}^{n_1-L} \alpha_j \right) v_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_1) \quad (\text{B.58})$$

$$\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = u_{k'}^{\nu'}(\boldsymbol{\alpha}_0) \exp \left( i\pi h \sum_{j=n_0+L}^{n_1-L} \alpha_j \right) v_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}'_1) \quad (\text{B.59})$$

$$\gamma_{kk'}^{\nu\nu'}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}') = u_{k'}^{\nu'}(\boldsymbol{\alpha}'_0) \exp \left( i\pi h \sum_{j=n_0+L}^{n_1-L} \alpha_j \right) v_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}'_1). \quad (\text{B.60})$$

En réinjectant les expressions (B.55), (B.58), (B.59) et (B.60) dans la définition (B.53) de  $\delta_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}', \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}')$ , on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \delta_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}', \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}') &= \left( u_{k'}^{\nu'}(\boldsymbol{\alpha}_0) - u_{k'}^{\nu'}(\boldsymbol{\alpha}'_0) \right) \exp \left( i\pi h \sum_{j=n_0+L}^{n_1-L} \alpha_j \right) \\ &\quad \times \left( v_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_1) - v_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}'_1) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

Nous disposons maintenant d'une factorisation de  $\delta_{kk'}^{\nu\nu'}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}', \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}')$  qui permet de réexprimer l'égalité (B.54). En effet, on obtient grâce à (B.61) :

$$\begin{aligned} \Re \left[ \left( \sum_{k=-\infty}^{n_0+L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} f_{\nu, n-k}^* \left( u_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_0) - u_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}'_0) \right) \right) \exp \left( i\pi h \sum_{j=n_0+L}^{n_1-L} \alpha_j \right) \right. \\ \left. \times \left( \sum_{k=n_1}^{\infty} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} f_{\nu, n-k} \left( v_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_1) - v_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}'_1) \right) \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

Notons que les facteurs intervenant dans l'égalité (B.62) dépendent chacun d'un ensemble de bits différents.

Puisque  $n_1 \geq n_0 + 2L$ , l'argument de l'exponentielle dans (B.62) comporte un terme au minimum. On peut donc appliquer le lemme B.2 en choisissant pour  $Z$  la valeur suivante :

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{k=-\infty}^{n_0+L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} f_{\nu, n-k}^* \left( u_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_0) - u_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}'_0) \right) \right) \exp \left( i\pi h \sum_{j=n_0+L}^{n_1-L-1} \alpha_j \right) \\ & \times \left( \sum_{k=n_1}^{\infty} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} f_{\nu, n-k} \left( v_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_1) - v_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}'_1) \right) \right). \end{aligned}$$

Le lemme B.2 implique que l'expression ci-dessus est nulle quelles que soient les valeurs des séquences binaires choisies. Ceci conduit finalement à énoncer le résultat suivant.

**Proposition B.1 :** *Soient  $n_0$  et  $n_1$  des entiers tels que  $n_1 \geq n_0 + 2L$ . Soient  $\alpha_{n_0}, \dots, \alpha_{n_1}$  des éléments de  $\{-1, +1\}$ . L'égalité suivante est vraie :*

$$e^{2i\pi\delta f_0 t} \sum_{k=-\infty}^{n_0+L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} f_{\nu, n-k}^* \left( u_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_0) - u_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}'_0) \right) = 0 \quad (\text{B.63})$$

$$\text{ou} \quad \sum_{k=n_1}^{\infty} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} f_{\nu, n-k} \left( v_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_1) - v_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}'_1) \right) = 0, \quad (\text{B.64})$$

où les séquences binaires  $\boldsymbol{\alpha}_0$ ,  $\boldsymbol{\alpha}'_0$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_1$  et  $\boldsymbol{\alpha}'_1$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_0 &= [-\alpha_{n_0}, \dots, \alpha_{n_0+L-1}]^T \\ \boldsymbol{\alpha}'_0 &= [-\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_0+L-1}]^T \\ \boldsymbol{\alpha}_1 &= [\alpha_{n_1-L+1}, \dots, \alpha_{n_1}]^T \\ \boldsymbol{\alpha}'_1 &= [\alpha_{n_1-L+1}, \dots, \alpha_{n_1-1}, -\alpha_{n_1}]^T. \end{aligned}$$

Deux cas sont alors à distinguer.

### ■ Cas n°1 :

Faisons l'hypothèse qu'il existe un entier  $N_0$  et une valeur particulière des séquences  $\boldsymbol{\alpha}_0$ ,  $\boldsymbol{\alpha}'_0$  tels que :

$$\sum_{k=-\infty}^{n_0+L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} f_{\nu, n-k}^* \left( u_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_0) - u_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}'_0) \right) \neq 0. \quad (\text{B.65})$$

Dans ce cas, la proposition B.1 indique que pour tout  $n_1 \geq n_0 + 2L$  et pour toutes séquences  $\boldsymbol{\alpha}_1$ ,  $\boldsymbol{\alpha}'_1$ , l'égalité (B.64) est réalisée.

Afin de simplifier la présentation des résultats, nous utilisons la notation suivante. Pour toute séquence binaire  $\boldsymbol{\alpha}_1 = [\alpha_{n_1-L+1}, \dots, \alpha_{n_1}]^T$ , on désigne par  $F_{n_1}(\boldsymbol{\alpha}_1)$  la quantité :

$$F_{n_1}(\boldsymbol{\alpha}_1) = \exp \left( -i\pi h \sum_{j=n_1-L+1}^{n_1-1} \alpha_j \right) \sum_{k=n_1}^{\infty} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} f_{\nu, n-k} v_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_1). \quad (\text{B.66})$$

La proposition suivante provient directement de la proposition B.64 et de l'équation (B.65) :

**Proposition B.2 :** *Pour tout entier  $n_1 \geq N_0 + 2L$ , pour toutes séquences binaires  $\alpha_1 = [\alpha_{n_1-L+1}, \dots, \alpha_{n_1}]^T$  et  $\alpha'_1 = [\alpha_{n_1-L+1}, \dots, \alpha_{n_1-1}, -\alpha_{n_1}]^T$ ,*

$$F_{n_1}(\alpha_1) - F_{n_1}(\alpha'_1) = 0. \quad (\text{B.67})$$

En utilisant la proposition B.2, nous montrons maintenant que les coefficients  $f_{\nu, n-k}$  sont nuls pour tout  $\nu$  appartenant à  $\mathcal{P}_L$  et pour tout  $k \geq N_0 + 2L$ . Il nous faut donc évaluer  $F_{n_1}(\alpha_1)$  dans un premier temps.

En utilisant (B.57), on peut obtenir une expression des coefficients  $v_k^\nu(\alpha_1)$ . Par exemple, si  $k$  est égal à  $n_1$ , l'espérance disparaît dans l'équation (B.57) et on constate immédiatement que :

$$v_{n_1}^\nu(\alpha_1) = \exp \left[ i\pi h \left( \sum_{j \in \nu} \alpha_{n_1-j} + \alpha_{n_1} \right) \right].$$

Par ailleurs, si  $k$  est supérieur ou égal à  $n_1 + L$ , (B.57) devient alors :

$$\begin{aligned} v_k^\nu(\alpha_1) &= \exp \left[ i\pi h \sum_{j=n_1-L+1}^{n_1} \alpha_j \right] E \left( \exp \left[ i\pi h \left( \sum_{j=n_1+1}^{k-L} a_j + \sum_{j \in \nu} a_{k-j} + a_k \right) \right] \right) \\ &= \exp \left[ i\pi h \sum_{j=n_1-L+1}^{n_1} \alpha_j \right] \prod_{j=n_1+1}^{k-L} E(e^{i\pi h a_j}) \prod_{j \in \nu} E(e^{i\pi h a_{k-j}}) \times E(e^{i\pi h a_k}) \\ &= \exp \left[ i\pi h \sum_{j=n_1-L+1}^{n_1} \alpha_j \right] C^{k-n_1-L} C^{\text{card}(\nu)} \times C, \end{aligned}$$

où  $C = \cos \pi h$  et où  $\text{card}(\nu)$  représente le nombre d'éléments de l'ensemble  $\nu$ . Enfin, si  $k$  est tel que  $n_1 + 1 \leq k \leq n_1 + L - 1$ , on obtient en utilisant le même procédé :

$$\begin{aligned} v_k^\nu(\alpha_1) &= \exp \left[ i\pi h \left( \sum_{j=n_1-L+1}^{k-L} \alpha_j + \sum_{\substack{j \in \nu \\ j \geq k-n_1}} \alpha_{k-j} \right) \right] E \left( \exp \left[ i\pi h \left( \sum_{\substack{j \in \nu \\ j \leq k-n_1-1}} a_{k-j} + a_k \right) \right] \right) \\ &= \exp \left[ i\pi h \left( \sum_{j=n_1-L+1}^{k-L} \alpha_j + \sum_{\substack{j \in \nu \\ j \geq k-n_1}} \alpha_{k-j} \right) \right] C^{1+\text{card}(\nu \cap \{1 \dots k-n_1-1\})}, \end{aligned}$$

où  $\text{card}(\nu \cap \{1 \dots k-n_1-1\})$  désigne le nombre d'éléments de  $\nu$  appartenant à l'ensemble

$\{1 \dots k - n_1 - 1\}$ . Grâce à ces résultats, l'équation (B.66) conduit à :

$$\begin{aligned}
 F_{n_1}(\boldsymbol{\alpha}_1) &= \sum_{k=n_1+L}^{\infty} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \exp[i\pi h \alpha_{n_1}] C^{w(k-n_1, \nu)} f_{\nu, n-k} \\
 &+ \sum_{k=n_1+1}^{n_1+L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \exp \left[ i\pi h \left( - \sum_{j=k-L+1}^{n_1-1} \alpha_j + \sum_{\substack{j \in \nu \\ j \geq k-n_1}} \alpha_{k-j} \right) \right] C^{w(k-n_1, \nu)} f_{\nu, n-k} \quad (\text{B.68}) \\
 &+ \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \exp \left[ i\pi h \left( - \sum_{j=n_1-L+1}^{n_1-1} \alpha_j + \sum_{j \in \nu} \alpha_{n_1-j} + \alpha_{n_1} \right) \right] f_{\nu, n-n_1}.
 \end{aligned}$$

L'exposant  $w(k - n_1, \nu)$  est défini par :

$$\begin{cases} w(k - n_1, \nu) = k - n_1 - L + 1 + \text{card}(\nu) & \text{si } k \geq n_1 + L \\ w(k - n_1, \nu) = 1 + \text{card}(\nu \cap \{1 \dots k - n_1 - 1\}) & \text{si } n_1 + L - 1 \geq k \geq n_1 + 1. \end{cases}$$

Rappelons que, d'après la proposition B.2,  $F_{n_1}(\boldsymbol{\alpha}_1) - F_{n_1}(\boldsymbol{\alpha}'_1) = 0$ , ce qui revient à dire que l'expression (B.68) ne dépend pas de la valeur de  $\alpha_{n_1}$ .

Maintenant que nous avons explicité  $F_{n_1}(\boldsymbol{\alpha}_1)$ , nous pouvons adopter la démarche suivante. Notre objectif est de montrer que les coefficients  $f_{\nu, n-k}$  sont nuls pour tout  $\nu$  appartenant à  $\mathcal{P}_L$  et pour tout  $k \geq N_0 + 2L$ . En utilisant la proposition B.2 avec des séquences binaires bien choisies, on peut montrer directement qu'une première moitié de ces coefficients est effectivement nulle. Plus précisément, on peut montrer que pour tout  $\nu$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{P}_{L-1}$  des parties de  $\{1, \dots, L-2\}$  et pour tout  $k \geq N_0 + 2L$ ,  $f_{\nu, n-k} = 0$ . En tenant compte de ce résultat, on peut alors réécrire l'équation (B.67) en fonction des coefficients restant, c'est à dire en fonction des coefficients  $f_{\{\nu, L-1\}, n-k}$  pour  $\nu \in \mathcal{P}_{L-1}$  et  $k \geq N_0 + 2L$  (la notation  $\{\nu, L-1\}$  est ici utilisée afin de désigner la réunion de l'ensemble  $\nu$  et de l'élément  $L-1$ ). En appliquant (B.67) avec d'autres séquences binaires, on peut ensuite montrer qu'une moitié des coefficients non encore identifiés est nulle. En répétant le procédé  $L$  fois, on obtient finalement la nullité de l'ensemble des coefficients  $f_{\nu, n-k}$  pour  $\nu \in \mathcal{P}_L$ ,  $k \geq N_0 + 2L$ . Cette approche revient à mettre en œuvre une démonstration par récurrence.

Afin de présenter cette démonstration nous devons introduire quelques notations.

**Notations :** Pour tout  $l \in \{2, \dots, L\}$ ,  $\mathcal{P}_l$  représente l'ensemble des parties de  $\{1, \dots, l-1\}$ . Par définition, on appelle  $\mathcal{P}_1$  l'ensemble constitué par le singleton  $\emptyset$  :  $\mathcal{P}_1 = \{\emptyset\}$ .

Pour tout  $l \in \{1, \dots, L-1\}$ , pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_l$ , on désigne par  $\{\nu, l, \dots, L-1\}$  la réunion de  $\nu$  et des éléments  $l, l+1, \dots, L-1$ . Si  $l = L$ , on pose par définition  $\{\nu, l, \dots, L-1\} = \nu$ .

Nous commençons par démontrer le lemme suivant, dont nous nous servirons plus loin.

**Lemme B.5 :** Soit  $l$  un entier quelconque,  $l \geq 1$ . Soit  $(z_\nu)_{\nu \in \mathcal{P}_l}$  une famille de nombres complexes telle que, quelles que soient les valeurs des bits  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{l-1}$ , l'égalité suivante

est réalisée :

$$\sum_{\nu \in \mathcal{P}_l} \exp \left( i\pi h \sum_{j \in \nu} \alpha_j \right) z_\nu = 0. \quad (\text{B.69})$$

Alors, pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_l$ ,  $z_\nu = 0$ .

**Preuve :** Nous démontrons le lemme par récurrence. Au rang  $l = 1$ , l'équation (B.69) est réduite à  $z_\emptyset = 0$ , et la proposition est donc triviale. Supposons que la proposition soit vraie pour un entier  $l \geq 1$ . Soit  $(z_\nu)_{\nu \in \mathcal{P}_{l+1}}$  une famille de nombres complexes telle que, quelles que soient les valeurs des bits  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ , l'égalité suivante est réalisée :

$$\sum_{\nu \in \mathcal{P}_{l+1}} \exp \left( i\pi h \sum_{j \in \nu} \alpha_j \right) z_\nu = 0.$$

L'équation ci-dessus équivaut à :

$$\left( \sum_{\nu \in \mathcal{P}_l} \exp \left( i\pi h \sum_{j \in \nu} \alpha_j \right) z_\nu \right) + e^{i\pi h \alpha_l} \left( \sum_{\nu \in \mathcal{P}_l} \exp \left( i\pi h \sum_{j \in \nu} \alpha_j \right) z_{\{\nu, l\}} \right).$$

Grâce au lemme B.4, on constate immédiatement que :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_l} \exp \left( i\pi h \sum_{j \in \nu} \alpha_j \right) z_\nu &= 0 \\ \sum_{\nu \in \mathcal{P}_l} \exp \left( i\pi h \sum_{j \in \nu} \alpha_j \right) z_{\{\nu, l\}} &= 0, \end{aligned}$$

quelles que soient les valeurs de  $\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence à chacune des deux égalités précédentes, on conclut que l'ensemble des coefficients  $(z_\nu)_{\nu \in \mathcal{P}_{l+1}}$  est nul.

Nous démontrons maintenant la proposition suivante par récurrence :

**Proposition B.3 :** Soit  $l$  compris entre  $L$  et 1. Pour tout  $k \geq N_0 + 2L$ , seuls les coefficients

$$f_{\{\nu, l, \dots, L-1\}, n-k} \quad \text{pour } \nu \in \mathcal{P}_l$$

sont susceptibles d'être non nuls.

**Preuve :** La proposition est triviale au rang  $l = L$ .

Supposons que la proposition soit vérifiée pour un entier  $l$  appartenant à  $\{2, \dots, L\}$ . On peut alors réécrire (B.68) en ne conservant que les termes faisant intervenir les coefficients :

$$\left\{ f_{\{\nu, l, \dots, L-1\}, n-k} / \nu \in \mathcal{P}_l, k \geq n_1 \right\},$$

les autres coefficients étant nuls. On obtient immédiatement à partir de (B.68) :

$$\begin{aligned}
F_{n_1}(\boldsymbol{\alpha}_1) &= \sum_{k=n_1+L}^{\infty} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_l} \exp [i\pi h \alpha_{n_1}] C^{w(k-n_1, \{\nu, l \dots L-1\})} f_{\{\nu, l \dots L-1\}, n-k} \\
&+ \sum_{k=n_1+1}^{n_1+L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_l} \exp \left[ i\pi h \left( - \sum_{j=k-L+1}^{n_1-1} \alpha_j + \sum_{\substack{j \in \nu \\ j \geq k-n_1}} \alpha_{k-j} + \sum_{j=\max(l, k-n_1)}^{L-1} \alpha_{k-j} \right) \right] C^{w(k-n_1, \{\nu, l \dots L-1\})} f_{\{\nu, l \dots L-1\}, n-k} \\
&+ \sum_{\nu \in \mathcal{P}_l} \exp \left[ i\pi h \left( - \sum_{j=n_1-L+1}^{n_1-1} \alpha_j + \sum_{j \in \nu} \alpha_{n_1-j} + \sum_{j=l}^{L-1} \alpha_{n_1-j} + \alpha_{n_1} \right) \right] f_{\{\nu, l \dots L-1\}, n-n_1}.
\end{aligned}$$

En remarquant notamment que  $\sum_{j=\max(l, k-n_1)}^{L-1} \alpha_{k-j} = \sum_{j=k-L+1}^{\min(k-l, n_1)} \alpha_j$ , on peut simplifier l'expression ci-dessus :

$$\begin{aligned}
F_{n_1}(\boldsymbol{\alpha}_1) &= \sum_{k=n_1+L}^{\infty} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_l} \exp [i\pi h \alpha_{n_1}] C^{w(k-n_1, \{\nu, l \dots L-1\})} f_{\{\nu, l \dots L-1\}, n-k} \\
&+ \sum_{k=n_1+1}^{n_1+L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_l} \exp \left[ i\pi h \left( - \sum_{j=\min(k-l, n_1)+1}^{n_1} \alpha_j + \alpha_{n_1} + \sum_{\substack{j \in \nu \\ j \geq k-n_1}} \alpha_{k-j} \right) \right] C^{w(k-n_1, \{\nu, l \dots L-1\})} f_{\{\nu, l \dots L-1\}, n-k} \\
&+ \sum_{\nu \in \mathcal{P}_l} \exp \left[ i\pi h \left( - \sum_{j=n_1-l+1}^{n_1-1} \alpha_j + \sum_{j \in \nu} \alpha_{n_1-j} + \alpha_{n_1} \right) \right] f_{\{\nu, l \dots L-1\}, n-n_1}.
\end{aligned} \tag{B.70}$$

Notons que  $F_{n_1}(\boldsymbol{\alpha}_1)$  ne dépend que de  $\alpha_{n_1-l+1}, \dots, \alpha_{n_1}$ .

Nous utilisons maintenant la proposition B.2. Soit  $n_1 \geq N_0 + 2L$  et soient deux séquences binaires  $\boldsymbol{\alpha}_1 = [\alpha_{n_1-L+1}, \dots, \alpha_{n_1}]^T$ ,  $\boldsymbol{\alpha}'_1 = [\alpha_{n_1-L+1}, \dots, \alpha_{n_1-1}, -\alpha_{n_1}]^T$ . On considère en outre le couple de séquences  $(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}'_1)$  qui coïncide avec  $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}'_1)$  à l'exception de la composante  $\alpha_{n_1-l+1}$  :

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1 &= [\alpha_{n_1-L+1}, \dots, \alpha_{n_1-l-1}, -\alpha_{n_1-l+1}, \alpha_{n_1-l+2}, \dots, \alpha_{n_1-1}, \alpha_{n_1}]^T \\
\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'_1 &= [\alpha_{n_1-L+1}, \dots, \alpha_{n_1-l-1}, -\alpha_{n_1-l+1}, \alpha_{n_1-l+2}, \dots, \alpha_{n_1-1}, -\alpha_{n_1}]^T.
\end{aligned}$$

L'équation (B.67) est valable d'une part pour les séquences  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}'_1$ , et d'autre part pour les séquences  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}'_1$ . En soustrayant terme à terme les deux équations correspondantes, on obtient :

$$\left( F_{n_1}(\boldsymbol{\alpha}_1) - F_{n_1}(\boldsymbol{\alpha}'_1) \right) - \left( F_{n_1}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1) - F_{n_1}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'_1) \right) = 0. \tag{B.71}$$

L'expression ci-dessus peut être évaluée simplement en observant que, parmi les trois termes du membre de droite de (B.70), le seul terme qui dépende de  $\alpha_{n_1-l+1}$  est le dernier, c'est à dire :

$$\sum_{\nu \in \mathcal{P}_l} \exp \left[ i\pi h \left( - \sum_{j=n_1-l+1}^{n_1-1} \alpha_j + \sum_{j \in \nu} \alpha_{n_1-j} + \alpha_{n_1} \right) \right] f_{\{\nu, l \dots L-1\}, n-n_1}.$$

En outre, parmi les termes qui composent l'expression ci-dessus, les seuls qui fassent intervenir  $\alpha_{n_1-l+1}$  sont ceux pour lesquels l'indice de sommation  $\nu \in \mathcal{P}_l$  est tel que le plus grand élément de  $\nu$ , s'il existe, est inférieur ou égal à  $l-2$  : ceci revient à dire que  $\nu \in \mathcal{P}_{l-1}$ .

$$(f_{\{\nu, l, \dots, L-1\}, n-n_1})_{\nu \in \mathcal{P}_{l-1}}.$$

La même remarque s'applique pour les différences  $F_{n_1}(\alpha_1) - F_{n_1}(\alpha'_1)$  et  $F_{n_1}(\tilde{\alpha}_1) - F_{n_1}(\tilde{\alpha}'_1)$ . Lors de l'opération (B.71), tous les autres termes disparaissent. On peut donc réexprimer (B.71) à partir de (B.70) en ne prenant en compte qu'un nombre réduit de termes. On obtient :

$$\sum_{\nu \in \mathcal{P}_{l-1}} \left[ \left( e^{-i\pi h \alpha_{n_1-l+1}} - e^{i\pi h \alpha_{n_1-l+1}} \right) \exp \left( i\pi h \left[ - \sum_{j=n_1-l+2}^{n_1-1} \alpha_{n_1-j} + \sum_{j \in \nu} \alpha_{n_1-j} \right] \right) \right. \\ \left. \times \left( e^{i\pi h \alpha_{n_1}} - e^{-i\pi h \alpha_{n_1}} \right) f_{\{\nu, l, \dots, L-1\}, n-n_1} \right] = 0.$$

En multipliant chaque membre de l'équation ci-dessus par la quantité

$$\frac{\exp \left( i\pi h \sum_{j=n_1-l+2}^{n_1-1} \alpha_{n_1-j} \right)}{(-2i\alpha_{n_1-l+1} \sin \pi h)(2i\alpha_{n_1} \sin \pi h)},$$

on peut alors écrire que, quelles que soient les valeurs de  $\alpha_{n_1-l+2}, \dots, \alpha_{n_1-1}$ ,

$$\sum_{\nu \in \mathcal{P}_{l-1}} \exp \left( i\pi h \sum_{j \in \nu} \alpha_{n_1-j} \right) f_{\{\nu, l, \dots, L-1\}, n-n_1} = 0. \quad (\text{B.72})$$

Le lemme B.5 permet alors de conclure que pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_{l-1}$ ,  $f_{\{\nu, l, \dots, L-1\}, n-n_1} = 0$ . Ceci implique que, parmi les coefficients  $(f_{\{\nu, l, \dots, L-1\}, n-n_1})_{\nu \in \mathcal{P}_l}$ , les seuls pouvant être non nuls sont les coefficients

$$(f_{\{\nu, l-1, l, \dots, L-1\}, n-n_1})_{\nu \in \mathcal{P}_{l-1}}.$$

Ce résultat est vrai quel que soit  $n_1 \geq N_0 + 2L$ , ce qui suffit à démontrer l'hypothèse de récurrence au rang  $l-1$  ■

En utilisant la proposition B.3 au rang  $l=1$ , on obtient que pour tout  $k \geq N_0 + 2L$ , seuls les coefficients  $f_{\{1, 2, \dots, L-1\}, n-k}$  sont susceptibles d'être non nuls. Nous utilisons la même démarche pour démontrer que ces coefficients sont également nuls. Réécrivons (B.70) à la lumière de ce résultat :

$$F_{n_1}(\alpha_1) = \exp(i\pi h \alpha_{n_1}) \left[ \sum_{k=n_1+1}^{\infty} C^{w(k-n_1, \{1 \dots L-1\})} f_{\{1 \dots L-1\}, n-k} + f_{\{1 \dots L-1\}, n-n_1} \right], \quad (\text{B.73})$$

ce qui peut s'écrire plus simplement :

$$F_{n_1}(\alpha_1) = \exp(i\pi h \alpha_{n_1}) \sum_{k=n_1}^{\infty} C^{k-n_1} f_{\{1 \dots L-1\}, n-k}. \quad (\text{B.74})$$

La proposition B.2 conduit alors à

$$\sum_{k=n_1}^{\infty} C^{k-n_1} f_{\{1\dots L-1\},n-k} = 0, \quad (\text{B.75})$$

pour tout  $n_1 \geq N_0 + 2L$ . Pour  $n_1$  fixé, on écrit que l'égalité précédente est vraie à la fois au rang  $n_1$  et au rang  $n_1 + 1$ , ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} f_{\{1\dots L-1\},n-n_1} &= \left( \sum_{k=n_1}^{\infty} C^{k-n_1} f_{\{1\dots L-1\},n-k} \right) - C \times \left( \sum_{k=n_1+1}^{\infty} C^{k-n_1-1} f_{\{1\dots L-1\},n-k} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'égalité ci-dessus est vraie pour tout  $n_1 \geq N_0 + 2L$ . Nous avons donc démontré que pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , la suite  $(f_{\nu,n-k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est nulle à partir du rang  $N_0 + 2L$ . Ceci implique en particulier que chacun des filtres  $f_{\nu}(z)$  inconnus est un filtre causal.



On désigne alors par  $\mathcal{A}$  l'ensemble des entiers  $n_1$  tels que, quels que soient les éléments binaires  $\alpha_{n_1+L-1}, \dots, \alpha_{n_1}$ , l'équation (B.64) soit vérifiée, soit :

$$\sum_{k=n_1}^{\infty} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} f_{\nu,n-k} \left( v_k^{\nu}(\boldsymbol{\alpha}_1) - v_k^{\nu}(\boldsymbol{\alpha}'_1) \right) = 0, \quad (\text{B.76})$$

où

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_1 &= [\alpha_{n_1-L+1}, \dots, \alpha_{n_1}]^T \\ \boldsymbol{\alpha}'_1 &= [\alpha_{n_1-L+1}, \dots, \alpha_{n_1-1}, -\alpha_{n_1}]^T. \end{aligned}$$

Puisque pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , la suite  $(f_{\nu,n-k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est nulle à partir d'un certain rang, il est clair que  $\mathcal{A}$  est un ensemble non vide. De plus,  $\mathcal{A}$  possède une borne inférieure entière. En effet, si ce n'était pas le cas, (B.76) serait vérifiée quel que soit l'entier  $n_1$ , ce qui conduirait à montrer que pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ ,  $(f_{\nu,n-k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est égale à la suite nulle : ceci impliquerait que  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est nul, ce qui est faux puisque  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est de module un.

On peut alors poser  $N_1 = \min \mathcal{A}$ , i.e.  $N_1$  est le plus petit entier tel que (B.76) est vraie. La démonstration précédente implique que pour tout  $n_1 \geq N_1$ ,

$$\forall \nu \in \mathcal{P}_L, f_{\nu,n-n_1} = 0. \quad (\text{B.77})$$

En outre  $N_1 - 1$  n'appartient pas à  $\mathcal{A}$ . Cela signifie qu'il existe des valeurs de  $\boldsymbol{\alpha}_1 = [\alpha_{N_1-L}, \dots, \alpha_{N_1-1}]^T$  et de  $\boldsymbol{\alpha}'_1 = [\alpha_{N_1-L}, \dots, \alpha_{N_1-2}, -\alpha_{N_1-1}]^T$  telles que :

$$\sum_{k=N_1-1}^{\infty} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} f_{\nu,n-k} \left( v_k^{\nu}(\boldsymbol{\alpha}_1) - v_k^{\nu}(\boldsymbol{\alpha}'_1) \right) \neq 0. \quad (\text{B.78})$$

D'après la proposition B.1, pour tout entier  $n_0 \leq N_1 - 2L - 1$ , pour toute valeur de la séquence  $\boldsymbol{\alpha}_0 = [\alpha_{n_0}, \dots, \alpha_{n_0+L-1}]^T$ , l'égalité suivante est réalisée :

$$\sum_{k=-\infty}^{n_0+L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} f_{\nu, n-k}^* \left( u_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_0) - u_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}'_0) \right) = 0, \quad (\text{B.79})$$

où  $\boldsymbol{\alpha}'_0 = [-\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_0+L-1}]^T$ . Pour toute séquence binaire  $\boldsymbol{\alpha}_0 = [\alpha_{n_0}, \dots, \alpha_{n_0+L-1}]^T$ , on désigne par  $G_{n_0}(\boldsymbol{\alpha}_0)$  la quantité :

$$G_{n_0}(\boldsymbol{\alpha}_0) = \exp \left( -i\pi h \sum_{j=n_0+1}^{n_0+L-1} \alpha_j \right) \sum_{k=-\infty}^{n_0+L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} f_{\nu, n-k}^* u_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_0). \quad (\text{B.80})$$

L'équation (B.79) implique que pour tout  $n_0 \leq N_1 - 2L - 1$ , pour tout  $\boldsymbol{\alpha}_0$  et pour tout  $\boldsymbol{\alpha}'_0 = [-\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_0+L-1}]^T$ ,

$$G_{n_0}(\boldsymbol{\alpha}_0) - G_{n_0}(\boldsymbol{\alpha}'_0) = 0. \quad (\text{B.81})$$

On évalue maintenant  $G_{n_0}(\boldsymbol{\alpha}_0)$  pour tout  $\boldsymbol{\alpha}_0$ . Pour cela, il nous faut d'abord calculer  $u_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_0)$ . Si  $k \leq n_0 - 1$ , la définition (B.56) conduit directement à :

$$u_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_0) = \exp \left[ i\pi h \sum_{j=n_0}^{n_0+L-1} \alpha_j \right] C^{m_0 - k - 1 + \text{card}(\bar{\nu}^L)}.$$

De même, si  $n_0 \leq k \leq n_0 + L - 1$ ,

$$u_k^\nu(\boldsymbol{\alpha}_0) = \exp \left[ i\pi h \left( \sum_{j=k+1}^{n_0+L-1} \alpha_j + \sum_{\substack{j \in \bar{\nu}^L \\ j \leq k - n_0}} \alpha_{k-j} \right) \right] C^{\text{card}(\bar{\nu}^L \cap \{k - n_0 + 1 \dots L - 1\})}.$$

En réinjectant les résultats ci-dessus dans (B.80), on obtient finalement :

$$\begin{aligned} G_{n_0}(\boldsymbol{\alpha}_0) &= e^{i\pi h \alpha_{n_0}} \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} C^{w'(k-n_0, \bar{\nu}^L)} f_{\nu, n-k}^* \\ &+ \sum_{k=n_0}^{n_0+L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \exp \left[ i\pi h \left( \alpha_{n_0} - \sum_{\substack{j \in \nu \\ j \leq k - n_0}} \alpha_{k-j} - \alpha_k \right) \right] C^{w'(k-n_0, \bar{\nu}^L)} f_{\nu, n-k}^*, \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

où

$$w'(k - n_0, \bar{\nu}^L) = \begin{cases} n_0 - k - 1 + \text{card}(\bar{\nu}^L), & \text{si } k - n_0 \leq -1 \\ \text{card}(\bar{\nu}^L \cap \{k - n_0 + 1 \dots L - 1\}) & \text{si } 0 \leq k - n_0 \leq L - 1. \end{cases}$$

Nous démontrons maintenant la proposition suivante par récurrence :

**Proposition B.4 :** *Pour tout  $l$  compris entre  $L$  et  $1$ , pour tout  $k \leq N_1 - 2L + l - 1$ , seuls les coefficients*

$$f_{\{l, \dots, L-1\}, n-k} \quad \text{pour } \nu \in \mathcal{P}_l$$

sont susceptibles d'être non nuls.

**Preuve :** La proposition est triviale au rang  $l = L$ .

Soit  $l$  un entier appartenant à  $\{2, \dots, L\}$ . Supposons que la proposition soit vraie pour tout entier  $l'$  appartenant à  $\{l, \dots, L\}$ . Nous montrons qu'elle reste vraie au rang  $l - 1$ .

Dans un premier temps, on réécrit  $G_{n_0}(\alpha_0)$  en tenant compte de l'hypothèse de récurrence ci-dessus. Soit  $n_0 \leq N_1 - 2L - 1$ . Pour tout  $k \leq n_0 + l$ , on a bien entendu  $k \leq N_1 - 2L + l - 1$  et donc, par hypothèse, seuls les coefficients  $f_{\{\nu, l, \dots, L-1\}, n-k}$ , avec  $\nu \in \mathcal{P}_l$  sont susceptibles d'être non nuls. Grâce à cette observation, on peut réécrire (B.82) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 G_{n_0}(\alpha_0) &= e^{i\pi h \alpha_{n_0}} \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_l} C^{w'(k-n_0, \overline{\{\nu, l, \dots, L-1\}}^L)} f_{\{\nu, l, \dots, L-1\}, n-k}^* \\
 &+ \sum_{k=n_0}^{n_0+l-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_l} \exp \left[ i\pi h \left( \alpha_{n_0} - \sum_{\substack{j \in \{\nu, l, \dots, L-1\} \\ j \leq k-n_0}} \alpha_{k-j} - \alpha_k \right) \right] C^{w'(k-n_0, \overline{\{\nu, l, \dots, L-1\}}^L)} f_{\{\nu, l, \dots, L-1\}, n-k}^* \\
 &+ \tilde{G}_{n_0, l}(\alpha_0),
 \end{aligned} \tag{B.83}$$

où le dernier terme  $\tilde{G}_{n_0, l}(\alpha_0)$  est défini par :

$$\tilde{G}_{n_0, l}(\alpha_0) = \sum_{k=n_0+l}^{n_0+L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \exp \left[ i\pi h \left( \alpha_{n_0} - \sum_{\substack{j \in \nu \\ j \leq k-n_0}} \alpha_{k-j} - \alpha_k \right) \right] C^{w'(k-n_0, \bar{\nu}^L)} f_{\nu, n-k}^*.$$

Nous utilisons ensuite l'hypothèse de récurrence aux rangs  $l, l+1, \dots, L-1$  afin de simplifier l'expression ci-dessus. Plus précisément, notre objectif est de montrer que  $\tilde{G}_{n_0, l}(\alpha_0)$  ne dépend pas de  $\alpha_{n_0}$ . Pour commencer, nous exprimons  $\tilde{G}_{n_0, l}(\alpha_0)$  grâce au changement de variable  $l' \leftarrow k - n_0$  :

$$\tilde{G}_{n_0, l}(\alpha_0) = \sum_{l'=l}^{L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \exp \left[ i\pi h \left( \alpha_{n_0} - \sum_{\substack{j \in \nu \\ j \leq l'}} \alpha_{n_0+l'-j} - \alpha_{n_0+l'} \right) \right] C^{w'(l', \bar{\nu}^L)} f_{\nu, n-n_0-l'}^*.$$

Par hypothèse, pour tout entier  $l'$  de l'ensemble  $\{l, l+1, \dots, L-1\}$ , pour tout  $k \leq N_1 - 2L + l' - 1$ , seuls les coefficients  $f_{\{\nu, l', \dots, L-1\}, n-k}$  avec  $\nu \in \mathcal{P}_{l'}$  sont susceptibles d'être non nuls. Puisque  $n_0 \leq N_1 + 2L - 1$ , cette remarque est vraie en particulier pour  $k = n_0 + l'$ . On peut alors écrire  $\tilde{G}_{n_0, l}(\alpha_0)$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_{n_0, l}(\alpha_0) &= \sum_{l'=l}^{L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_{l'}} \exp \left[ i\pi h \left( \alpha_{n_0} - \sum_{\substack{j \in \{\nu, l', \dots, L-1\} \\ j \leq l'}} \alpha_{n_0+l'-j} - \alpha_{n_0+l'} \right) \right] C^{w'(l', \bar{\nu}^L)} f_{\{\nu, l', \dots, L-1\}, n-n_0-l'}^* \\
 &= \sum_{l'=l}^{L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_{l'}} \exp \left[ i\pi h \left( - \sum_{j \in \nu} \alpha_{n_0+l'-j} - \alpha_{n_0+l'} \right) \right] C^{w'(l', \bar{\nu}^L)} f_{\{\nu, l', \dots, L-1\}, n-n_0-l'}^*.
 \end{aligned}$$

On constate immédiatement que  $\tilde{G}_{n_0,l}(\boldsymbol{\alpha}_0)$  ne dépend pas de  $\alpha_{n_0}$ .

Nous utilisons maintenant l'équation (B.81) pour des séquences binaires bien choisies. Pour tout  $n_0 \leq N_1 - 2L - 1$ , on définit les séquences :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_0 &= [\alpha_{n_0}, \dots, \alpha_{n_0+L-1}]^T \\ \boldsymbol{\alpha}'_0 &= [-\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_0+L-1}]^T, \\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0 &= [\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_0+l-2}, -\alpha_{n_0+l-1}, \alpha_{n_0+l}, \dots, \alpha_{n_0+L-1}]^T \\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}}'_0 &= [-\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_0+l-2}, -\alpha_{n_0+l-1}, \alpha_{n_0+l}, \dots, \alpha_{n_0+L-1}]^T.\end{aligned}$$

L'équation (B.81) est vérifiée d'une part pour les séquences  $\boldsymbol{\alpha}_0$ ,  $\boldsymbol{\alpha}'_0$ , et d'autre part pour les séquences  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'_0$ . La soustraction terme à terme des deux équations ainsi obtenues conduit à :

$$\left(G_{n_0}(\boldsymbol{\alpha}_0) - G_{n_0}(\boldsymbol{\alpha}'_0)\right) - \left(G_{n_0}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_0) - G_{n_0}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}'_0)\right) = 0. \quad (\text{B.84})$$

Bien entendu, on peut évaluer l'expression ci-dessus en prenant seulement en compte les termes de  $G_{n_0}$  qui dépendent à la fois de  $\alpha_{n_0}$  et de  $\alpha_{n_0+l-1}$ . En observant l'équation (B.83), on constate que les termes en question sont ceux pour lesquels l'indice de sommation  $k$  est égal à  $n_0 + l - 1$  et pour lesquels l'indice de sommation  $\nu$  est tel que  $\nu \in \mathcal{P}_{l-1}$ . En utilisant ces considérations, on peut finalement réécrire (B.84) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}& \left(2i \sin \pi h \alpha_{n_0}\right) \left(-2i \sin \pi h \alpha_{n_0+l-1}\right) \\ & \times \sum_{\nu \in \mathcal{P}_{l-1}} \exp \left[ -i\pi h \sum_{j \in \nu} \alpha_{n_0+l-1-j} \right] C^{w'(l-1, \bar{\nu}^l)} f_{\{\nu, l \dots L-1\}, n-(n_0+l-1)}^* = 0,\end{aligned}$$

et comme  $C^{w'(l-1, \bar{\nu}^l)} = 1$  pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_{l-1}$ , l'équation précédente conduit immédiatement à :

$$\sum_{\nu \in \mathcal{P}_{l-1}} \exp \left[ -i\pi h \sum_{j \in \nu} \alpha_{n_0+l-1-j} \right] f_{\{\nu, l \dots L-1\}, n-(n_0+l-1)}^* = 0. \quad (\text{B.85})$$

Le lemme B.5 permet de conclure que pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_{l-1}$ ,  $f_{\{\nu, l \dots L-1\}, n-(n_0+l-1)} = 0$ . Ceci est vrai pour tout entier  $n_0 \leq N_1 + 2L - 1$ . Finalement, pour tout  $k \leq N_1 + 2L + l - 2$ , seuls les coefficients

$$f_{\{\nu, l-1, l, \dots, L-1\}, n-k} \quad \text{pour } \nu \in \mathcal{P}_{l-1}$$

sont susceptibles d'être non nuls. La proposition est vraie au rang  $l - 1$  ■

En particulier, la proposition B.4 est vraie pour  $l = 1$ . Donc, pour tout  $k \leq N_1 - 2L$ , seuls les coefficients  $f_{\{1, \dots, L-1\}, n-k}$  sont susceptibles d'être non nuls. En utilisant la même démarche que précédemment, on peut alors écrire que pour tout  $n_0 \leq N_1 + 2L - 1$ ,

$$G_{n_0}(\boldsymbol{\alpha}_0) = e^{i\pi h \alpha_{n_0}} \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} C^{w'(k-n_0, \emptyset)} f_{\{1 \dots L-1\}, n-k}^* + \lambda(\alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_0+L-1}), \quad (\text{B.86})$$

où  $\lambda(\alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_0+L-1})$  représente une constante par rapport à  $\alpha_{n_0}$ . En rappelant que pour tout  $k \leq n_0 - 1$ ,  $w'(k - n_0, \emptyset) = n_0 - k - 1$ , on obtient grâce à (B.81) :

$$\sum_{k=-\infty}^{n_0-1} C^{n_0-k-1} f_{\{1 \dots L-1\}, n-k}^* = 0$$

pour tout  $n_0 \leq N_1 + 2L - 1$ . Finalement,

$$\begin{aligned} f_{\{1\dots L-1\}, n-(n_0-1)} &= \left( \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} C^{n_0-k-1} f_{\{1\dots L-1\}, n-k} \right) - C \times \left( \sum_{k=-\infty}^{n_0-2} C^{n_0-k-2} f_{\{1\dots L-1\}, n-k} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce résultat est vrai pour tout  $n_0 \leq N_1 + 2L - 1$ , donc, pour tout  $k \leq N_1 - 2L - 2$ ,  $f_{\{1\dots L-1\}, n-k} = 0$ .

En particulier, la proposition B.4 implique pour tout  $k \leq N_1 - 2L - 2$ , pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ ,  $f_{\nu, n-k} = 0$ .

On rappelle en outre que pour tout  $k \geq N_1$ , pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ ,  $f_{\nu, n-k} = 0$ . En combinant ces deux résultats, on obtient que pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ ,  $f_{\nu, n-k}$  n'est susceptible d'être non nul que si  $k$  est dans l'ensemble  $\{N_1 - 2L - 1, \dots, N_1 - 1\}$ . Par conséquent, chaque filtre  $f_\nu(z) = \sum_k f_{\nu, k} z^{-k}$  possède au plus  $2L + 1$  coefficients non nuls.

Plus précisément, la proposition B.4 permet d'énoncer le résultat suivant. En posant par commodité  $K = n - (N_1 - 1)$ , on constate que :

- Si  $\nu = \{1, 2, \dots, L - 1\}$ ,  $f_{\{1\dots L-1\}, k} = 0$  pour  $k \neq K, \dots, K + 2L$ ,
- Si  $\nu = \{2, \dots, L - 1\}$ ,  $f_{\{2\dots L-1\}, k} = 0$  pour  $k \neq K, \dots, K + 2L - 2$ ,
- Si  $\nu = \begin{cases} \{3, \dots, L - 1\} \text{ ou} \\ \{1, 3, \dots, L - 1\} \end{cases}$   $f_{\nu, k} = 0$  pour  $k \neq K, \dots, K + 2L - 3$ ,
- Pour tout  $l \in \{1, \dots, L - 1\}$ ,  
Si  $\nu = \{\nu', l + 1, \dots, L - 1\}$  où  $\nu' \in \mathcal{P}_l$ ,  $f_{\nu, k} = 0$  pour  $k \neq K, \dots, K + 2L - l - 1$ ,
- Si  $\nu \in \mathcal{P}_{L-1}$ ,  $f_{\nu, k} = 0$  pour  $k \neq K, \dots, K + L$ .

Le résultat précédent peut être exprimé différemment, en faisant intervenir le complémentaire  $\bar{\nu}^L$  de  $\nu$  dans l'ensemble  $\{1, 2, \dots, L - 1\}$ . En effet, dire qu'un ensemble  $\nu \in \mathcal{P}_L$  peut s'écrire  $\nu = \{\nu', l + 1, \dots, L - 1\}$  avec  $l \in \{1, \dots, L - 1\}$  et  $\nu' \in \mathcal{P}_l$ , revient à dire que :

1.  $\bar{\nu}^L$  est non vide ;
2.  $\bar{\nu}^L$  a pour plus grand élément  $\max(\bar{\nu}^L) = l$ .

Cette remarque permet de réécrire le résultat précédent de la manière suivante :

- $f_{\{1\dots L-1\}, k} = 0$  pour tout  $k \neq K, \dots, K + 2L$  ;
- Pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$  différent de  $\{1, \dots, L - 1\}$ ,  $f_{\nu, k} = 0$  pour tout  $k \neq K, \dots, K + 2L - \max(\bar{\nu}^L) - 1$ .



**Cas n°2 :**

Nous supposons maintenant, à l'inverse du Cas n°1, que pour tout entier  $n_0$  et pour toute valeur de la séquence  $\alpha_0 = [\alpha_{n_0}, \dots, \alpha_{n_0+L-1}]^T$ ,

$$\sum_{k=-\infty}^{n_0+L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} f_{\nu, n-k}^* \left( u_k^\nu(\alpha_0) - u_k^\nu(\alpha'_0) \right) = 0, \quad (\text{B.87})$$

où  $\alpha'_0 = [-\alpha_{n_0}, \alpha_{n_0+1}, \dots, \alpha_{n_0+L-1}]^T$ . La proposition B.4 est alors vérifiée quel que soit l'entier  $N_1$  considéré. On en déduit que chacun des filtres  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  coïncide avec le filtre nul. Or ceci est impossible puisque  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est de module un. Ce cas ne se produit pas.

**B.4 Preuve du corollaire 3.1**

Le signal à temps discret  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est tel que :

$$z(n) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} [f_\nu(z)] x_\nu(n),$$

où les pseudo-symboles sont définis pour tout entier  $n$  et pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$  par :

$$x_\nu(n) = \exp \left[ i\pi h \left( \sum_{j=-\infty}^{n-L} a_j + \sum_{j \in \nu} a_{n-j} + a_n \right) \right], \quad (\text{B.88})$$

où  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  est une famille de filtres numériques qui vérifient le résultat 3.4. On suppose que l'entier  $K$  défini par le résultat 3.4 est nul, de telle sorte que les coefficients des filtres  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  vérifient :

- $f_{\{1 \dots L-1\}, k} = 0$  pour tout  $k \neq 0, \dots, 2L$  ;
- pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$  différent de  $\{1, \dots, L-1\}$  :

$$f_{\nu, k} = 0 \text{ pour tout } k \neq 0, \dots, 2L - \max(\bar{\nu}^L) - 1.$$

Cette hypothèse n'implique bien entendu aucune restriction. Pour tout entier  $n$ , on peut alors écrire  $z(n)$  de la manière suivante :

$$z(n) = \sum_{k=0}^{2L} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} x_\nu(n-k) f_{\nu, k}.$$

Décomposons l'équation ci-dessus en trois termes :

$$z(n) = z_1(n) + z_2(n) + z_3(n), \quad (\text{B.89})$$

avec

$$z_1(n) = \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} x_\nu(n-k) f_{\nu, k} \quad (\text{B.90})$$

$$z_2(n) = \sum_{k=L}^{2L} \sum_{\substack{\nu \in \mathcal{P}_L \\ \nu \neq \{1 \dots L-1\}}} x_\nu(n-k) f_{\nu, k} \quad (\text{B.91})$$

$$z_3(n) = \sum_{k=L}^{2L} x_{\{1 \dots L-1\}}(n-k) f_{\{1 \dots L-1\}, k}. \quad (\text{B.92})$$

Notre démarche consiste maintenant à montrer que chacune des trois quantités définies ci-dessus peut s'écrire comme le produit de  $\exp\left(i\pi h \sum_{k=-\infty}^{n-2L} a_j\right)$  et d'une fonction des seuls symboles  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-2L+1}$ .

Cette affirmation est de toute évidence vraie pour  $z_1(n)$ . En effet, en injectant la définition (B.88) dans l'équation (B.90) et en écrivant que pour tout  $k$  compris entre 0 et  $L-1$ ,

$$\exp\left(i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-k-L} a_j\right) = \exp\left(i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-2L} a_j\right) \times \exp\left(i\pi h \sum_{j=n-2L+1}^{n-k-L} a_j\right),$$

on obtient immédiatement :

$$z_1(n) = \exp\left(i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-2L} a_j\right) \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \exp\left[i\pi h \left( \sum_{j=n-2L+1}^{n-k-L} a_j + \sum_{j \in \nu} a_{n-k-j} + a_{n-k} \right)\right] f_{\nu,k}. \quad (\text{B.93})$$

Il est clair que le second facteur du membre de droite de l'équation ci-dessus ne dépend que de  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-2L+1}$ .

Le cas de  $z_2(n)$  nécessite quelques manipulations supplémentaires. L'inversion des deux "signes somme" et l'utilisation du résultat 3.4 conduit à :

$$z_2(n) = \sum_{\substack{\nu \in \mathcal{P}_L \\ \nu \neq \{1 \dots L-1\}}} \sum_{k=L}^{2L-1-\max(\bar{\nu}^L)} x_\nu(n-k) f_{\nu,k}.$$

Nous exprimons maintenant  $x_\nu(n-k)$  grâce à (B.88). Remarquons que pour tout  $k$  compris entre  $L$  et  $2L$  :

$$\exp\left(i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-k-L} a_j\right) = \exp\left(i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-2L} a_j\right) \times \exp\left(-i\pi h \sum_{j=n-k-L+1}^{n-2L} a_j\right).$$

Ceci nous permet d'écrire que pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$  tel que  $\nu \neq \{1, \dots, L-1\}$  et pour tout  $k$  compris entre  $L$  et  $2L-1-\max \bar{\nu}^L$ ,

$$x_\nu(n-k) = \exp\left(i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-2L} a_j\right) \times \sum_{\substack{\nu \in \mathcal{P}_L \\ \nu \neq \{1 \dots L-1\}}} \sum_{k=L}^{2L-1-\max(\bar{\nu}^L)} \exp\left[i\pi h \left( - \sum_{k=n-k-L+1}^{n-2L} a_j + \sum_{j \in \nu} a_{n-k-j} + a_{n-k} \right)\right] f_{\nu,k}.$$

L'expression précédente peut être considérablement simplifiée en utilisant les remarques suivantes. Soit  $\nu$  un ensemble fixé, différent de  $\{1, \dots, L-1\}$ . Pour tout  $k$  compris entre

$L$  et  $2L - 1 - \max \bar{\nu}^L$ , on écrit que :

$$\begin{aligned} - \sum_{k=n-k-L+1}^{n-2L} a_j + \sum_{j \in \nu} a_{n-k-j} &= - \sum_{k=2L-k}^{L-1} a_{n-k-j} + \sum_{\substack{j \in \nu \\ j \geq 2L-k}} a_{n-k-j} + \sum_{\substack{j \in \nu \\ j \leq 2L-k-1}} a_{n-k-j} \\ &= - \sum_{\substack{j \in \bar{\nu}^L \\ j \geq 2L-k}} a_{n-k-j} + \sum_{\substack{j \in \nu \\ j \leq 2L-k-1}} a_{n-k-j}. \end{aligned}$$

Or si  $k \leq 2L - 1 - \max \bar{\nu}^L$ , on obtient immédiatement que  $2L - k \geq \max \bar{\nu}^L + 1$ , ce qui implique que la somme

$$\sum_{\substack{j \in \bar{\nu}^L \\ j \geq 2L-k}} a_{n-k-j}$$

ne comporte aucun terme, et est donc nulle par définition. Finalement,

$$\begin{aligned} z_2(n) &= \exp \left( i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-2L} a_j \right) \times \\ &\sum_{\substack{\nu \in \mathcal{P}_L \\ \nu \neq \{1 \dots L-1\}}} \sum_{k=L}^{2L-1-\max(\bar{\nu}^L)} \exp \left[ i\pi h \left( \sum_{\substack{j \in \nu \\ j \leq 2L-k-1}} a_{n-k-j} + a_{n-k} \right) \right] f_{\nu, k}. \end{aligned} \quad (\text{B.94})$$

L'égalité ci-dessus suffit à montrer que  $z_2(n)$  peut s'écrire comme le produit de

$$\exp \left( i\pi h \sum_{k=-\infty}^{n-2L} a_j \right)$$

et d'une fonction des seuls symboles  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-2L+1}$ .

Enfin, on vérifie que cette proposition s'applique également à  $z_3(n)$ . D'après (B.92),

$$\begin{aligned} z_3(n) &= \sum_{k=L}^{2L} \exp \left( i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-k} a_j \right) f_{\{1 \dots L-1\}, k} \\ &= \exp \left( i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-2L} a_j \right) \sum_{k=L}^{2L} \exp \left( i\pi h \sum_{j=n-2L+1}^{n-k} a_j \right) f_{\{1 \dots L-1\}, k}. \end{aligned} \quad (\text{B.95})$$

Finalement, en réinjectant (B.93), (B.94) et (B.95) dans (B.89), on peut exhiber une fonction  $F(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-2L+1})$  des symboles  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-2L+1}$  telle que pour tout  $n$ ,

$$z(n) = \exp \left( i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-2L} a_j \right) F(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-2L+1}). \quad (\text{B.96})$$

En utilisant en outre le fait que  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est de module 1, on écrit que  $F(a_n, \dots, a_{n-2L+1})$  est nécessairement de la forme :

$$F(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-2L+1}) = \exp(i\theta(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-2L+1})),$$

où  $\theta(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-2L+1})$  est une certaine fonction des symboles  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-2L+1}$ . Cette dernière expression permet de démontrer le résultat souhaité.

## B.5 Preuve du lemme 3.1

Dans ce paragraphe, nous désignons par  $\mathcal{F}(\{-1, +1\}^{L'}, \mathbb{C})$  l'espace vectoriel des fonctions de  $\{-1, +1\}^{L'}$  dans  $\mathbb{C}$ .  $\mathcal{F}(\{-1, +1\}^{L'}, \mathbb{C})$  est isomorphe à  $\mathbb{C}^{2^{L'}}$ . En effet, toute fonction de  $L'$  symboles binaires n'est susceptible de prendre que  $2^{L'}$  valeurs, une pour chaque valeur du  $L'$ -uplet de variables. Soit  $\Psi$  la fonction qui à tout élément  $\theta$  de  $\mathcal{F}(\{-1, +1\}^{L'}, \mathbb{C})$  fait correspondre le vecteur de  $\mathbb{C}^{2^{L'}}$  dont les composantes correspondent aux valeurs prises par  $\theta$  pour toutes les valeurs possibles des  $L'$  variables. On peut facilement vérifier que  $\Psi$  est un isomorphisme. Par conséquent,  $\mathcal{F}(\{-1, +1\}^{L'}, \mathbb{C})$  est un espace de dimension  $2^{L'}$ .

Considérons ensuite la famille de fonctions de  $\mathcal{F}(\{-1, +1\}^{L'}, \mathbb{C})$  définie par :

$$\left( (a_n, \dots, a_{n-L'+1}) \rightarrow \prod_{j \in \omega} a_{n-j} \right)_{\omega \in \mathcal{Q}_{L'}}. \quad (\text{B.97})$$

On montre par récurrence sur  $L'$  que cette famille est libre. L'affirmation est triviale pour  $L' = 0$  : tout élément de  $\mathcal{F}(\{-1, +1\}^{L'}, \mathbb{C})$  est alors une fonction constante. Supposons que la propriété soit vraie au rang  $L'$  et considérons une famille de coefficients complexes  $(\lambda_\omega)_{\omega \in \mathcal{Q}_{L'+1}}$  telle que, quelle que soit la valeur des symboles  $a_n, \dots, a_{n-L'}$ ,

$$\sum_{\omega \in \mathcal{Q}_{L'+1}} \lambda_\omega \prod_{j \in \omega} a_{n-j} = 0. \quad (\text{B.98})$$

Nous écrivons alors l'équation ci-dessus en choisissant pour  $a_{n-L'+1}$  les valeurs  $+1$  et  $-1$  tour à tour. En soustrayant terme à terme les deux équations ainsi obtenues on s'aperçoit que les seuls termes non nuls sont les termes dont l'indice  $\omega$  contient  $L'$ , c'est à dire tels que  $\omega$  puisse s'écrire  $\omega = \{\omega', L'\}$  avec  $\omega' \in \mathcal{Q}_{L'}$ . Il reste finalement :

$$\sum_{\omega' \in \mathcal{Q}_{L'}} \lambda_{\{\omega', L'\}} \left( \prod_{j \in \omega'} a_{n-j} \times 1 - \prod_{j \in \omega'} a_{n-j} \times (-1) \right) = 0,$$

c'est à dire que pour toute valeur de  $a_n, \dots, a_{n-L'+1}$ ,

$$\sum_{\omega' \in \mathcal{Q}_{L'}} \lambda_{\{\omega', L'\}} \prod_{j \in \omega'} a_{n-j} = 0. \quad (\text{B.99})$$

Nous utilisons alors l'hypothèse de récurrence et concluons que les coefficients  $(\lambda_{\{\omega', L'\}})_{\omega' \in \mathcal{Q}_{L'}}$  sont tous nuls. Donc seuls les coefficients  $(\lambda_\omega)_{\omega \in \mathcal{Q}_{L'}}$  sont à ce stade susceptibles d'être non nuls. Par conséquent, l'équation (B.98) se réduit à :

$$\sum_{\omega' \in \mathcal{Q}_{L'}} \lambda_{\omega'} \prod_{j \in \omega'} a_{n-j} = 0. \quad (\text{B.100})$$

En utilisant à nouveau l'hypothèse de récurrence, nous obtenons que les coefficients  $(\lambda_{\omega'})_{\omega' \in \mathcal{Q}_{L'}}$  sont également nuls. Tous les coefficients  $(\lambda_\omega)_{\omega \in \mathcal{Q}_{L'+1}}$  sont donc nuls, et l'hypothèse de récurrence est donc également vraie au rang  $L'+1$ . Finalement, la famille de fonctions (B.97) est libre quel que soit  $L'$ .

Puisque cette famille contient en outre un nombre d'éléments égal à la dimension de l'espace  $\mathcal{F}(\{-1, +1\}^{L'}, \mathbb{C})$ , on conclut qu'elle forme une base de  $\mathcal{F}(\{-1, +1\}^{L'}, \mathbb{C})$ . Ceci conduit directement au lemme 3.1.

## B.6 Preuve de la proposition 3.4

Soient  $\phi_a(t)$  et  $h_a(t)$  deux fonctions fixées correspondant respectivement à la primitive du filtre de mise en forme utilisé par l'émetteur et à la réponse impulsionnelle du canal de transmission. Afin de simplifier l'écriture de ce paragraphe, nous utilisons la notation suivante : pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , on pose :

- $\kappa(\bar{\nu}^L) = 2L - \max(\bar{\nu}^L) - 1$  si  $\nu$  est différent de  $\{1, \dots, L-1\}$ ,
- $\kappa(\bar{\nu}^L) = 2L$  si  $\nu = \{1, \dots, L-1\}$ .

Conformément aux hypothèses de la proposition 3.4, considérons une famille de filtres numériques  $(f_\nu(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{\nu,k} z^{-k})_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  appartenant à  $\mathcal{F}_L$  telle que pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$  :

$$f_{\nu,k} = 0 \text{ pour tout } k \notin \{0, \dots, \kappa(\bar{\nu}^L)\}. \quad (\text{B.101})$$

Nous vérifions que, dans des cas usuels,  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  appartient à  $\mathcal{G}_L$ . L'objectif est donc de montrer qu'il existe une certaine fonction  $\tilde{h}_a(t)$  telle que pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , on peut écrire le filtre  $f_\nu(z)$  de la manière suivante :

$$f_\nu(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_{\mathbb{R}} \tilde{h}_a(u) c_\nu(kT_s - u) du \right) z^{-k}, \quad (\text{B.102})$$

et telle qu'il existe une valeur de l'égaliseur  $G(f)$  pour laquelle la transformée de Fourier  $\tilde{H}(f)$  vérifie :

$$\tilde{H}(f) = H(f)G(f). \quad (\text{B.103})$$

Il va de soi que cette dernière condition est vérifiée quelle que soit la réponse du canal  $H(f)$  considéré, à condition bien sûr que  $H(f)$  ne s'annule pas. Dans ce cas en effet, si nous parvenons à mettre en évidence une fonction  $\tilde{h}_a(t)$  vérifiant (B.102), il suffit de choisir un égaliseur  $G(f)$  tel que  $G(f) = \tilde{H}(f)/H(f)$  pour que (B.103) soit vérifiée. Nous pouvons donc nous passer de la condition (B.103). Ceci revient à dire que pour une classe donnée de modulations CPM, l'ensemble  $\mathcal{G}_L$  est identique quel que soit le canal de transmission. Il nous suffit donc de construire une fonction  $\tilde{h}_a(t)$  qui vérifie (B.102).

**Notations :** Nous nous plaçons à partir de maintenant dans l'espace vectoriel des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et de module au carré sommable. Nous désignons ici par  $\mathcal{C}$  l'espace de Hilbert engendré par la famille  $(t \rightarrow c_\nu(kT_s - t))_{\nu \in \mathcal{P}_L, k \in \mathbb{Z}}$ .

$$\mathcal{C} = \text{Vect} \left\{ c_\nu(kT_s - t) / \nu \in \mathcal{P}_L, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nous définissons ensuite les deux sous-espaces  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{C}$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \text{Vect} \left\{ c_\nu(kT_s - t) / \nu \in \mathcal{P}_L, k \in \{0, \dots, \kappa(\bar{\nu}^L)\} \right\} \\ \mathcal{D} &= \text{Vect} \left\{ c_\nu(kT_s - t) / \nu \in \mathcal{P}_L, k \notin \{0, \dots, \kappa(\bar{\nu}^L)\} \right\}. \end{aligned}$$

Quelles que soient les fonctions continues  $f(t)$  et  $g(t)$  appartenant à  $\mathcal{C}$ , on désigne dorénavant par  $\langle f(t), g(t) \rangle$  le produit scalaire

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)^* dt.$$

Les notations ci-dessus permettent de réexprimer le problème de la manière suivante. Nous objectif est de montrer qu'il existe une fonction  $\tilde{h}_a(t)$  telle que :

1. Pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$  et pour tout  $k \in \{0, \dots, \kappa(\bar{\nu}^L)\}$ ,  $\langle c_\nu(kT_s - t), \tilde{h}_a(t)^* \rangle = f_{\nu,k}$ ;
2. Pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$  et pour tout  $k \notin \{0, \dots, \kappa(\bar{\nu}^L)\}$ ,  $\langle c_\nu(kT_s - t), \tilde{h}_a(t)^* \rangle = 0$ .

La seconde condition implique que  $\tilde{h}_a(t)^*$  doit être choisie dans le sous-espace orthogonal à  $\mathcal{D}$ , soit  $\mathcal{D}^\perp$ . Il nous faut donc exhiber un élément de  $\mathcal{D}^\perp$  dont le produit scalaire avec chacune des fonctions  $c_\nu(kT_s - t)$  engendrant l'espace  $\mathcal{E}$  vaut  $f_{\nu,k}$ . Dans cette perspective, nous considérons la proposition suivante.

**Proposition B.5 :** *Pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$  et pour tout  $k \in \{0, \dots, \kappa(\bar{\nu}^L)\}$ , on désigne par  $c_{\nu,k}^\perp(t)$  le projeté orthogonal de  $c_\nu(kT_s - t)$  sur  $\mathcal{D}^\perp$ . Alors la famille*

$$\left\{ c_{\nu,k}^\perp(t) / \nu \in \mathcal{P}_L, k \in \{0, \dots, \kappa(\bar{\nu}^L)\} \right\}$$

forme une famille libre de  $\mathcal{D}^\perp$ .

Nous nous sommes contentés de vérifier que cette proposition est vraie dans des cas usuels. La démarche utilisée afin de valider la proposition figure à la fin de ce paragraphe. Pour l'instant, nous supposons que cette affirmation est vraie et nous montrons comment elle peut être utilisée pour construire la fonction  $\tilde{h}_a(t)^*$  souhaitée.

Nous posons par commodité :

$$\mathcal{E}' = \text{Vect} \left\{ c_{\nu,k}^\perp(t) / \nu \in \mathcal{P}_L, k \in \{0, \dots, \kappa(\bar{\nu}^L)\} \right\}.$$

$\mathcal{E}'$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}^\perp$ . D'après la proposition B.5, la famille

$$\left\{ c_{\nu,k}^\perp(t) / \nu \in \mathcal{P}_L, k \in \{0, \dots, \kappa(\bar{\nu}^L)\} \right\}$$

forme une base de  $\mathcal{E}'$ . Pour tout élément  $x(t) \in \mathcal{E}'$ , nous pouvons donc écrire :

$$x(t) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \sum_{k=0}^{\kappa(\bar{\nu}^L)} x_{\nu,k} c_{\nu,k}^\perp(t). \quad (\text{B.104})$$

$\mathcal{E}'$  est un espace de dimension finie. Par conséquent, nous savons que pour toute forme linéaire  $\Psi$  de  $\mathcal{E}'$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe un unique élément (appelons le  $\tilde{h}_a(t)^*$ ) appartenant à  $\mathcal{E}'$  tel que pour tout  $x(t) \in \mathcal{E}'$ ,  $\langle x(t), \tilde{h}_a(t)^* \rangle = \Psi(x(t))$ . Nous considérons maintenant une forme linéaire  $\Psi$  bien choisie. Soit  $\Psi$  la forme linéaire définie pour tout  $x(t) \in \mathcal{E}'$  par :

$$\Psi(x(t)) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \sum_{k=0}^{\kappa(\bar{\nu}^L)} x_{\nu,k} f_{\nu,k},$$

où les coefficients  $(x_{\nu,k})_{\nu \in \mathcal{P}_L, k \in \{0, \dots, \kappa(\bar{\nu}^L)\}}$  sont univoquement définis par (B.104). Soit alors  $\tilde{h}_a(t)^*$  l'unique élément de  $\mathcal{E}'$  tel que pour tout  $x(t) \in \mathcal{E}'$ ,  $\langle x(t), \tilde{h}_a(t)^* \rangle = \Psi(x(t))$ . On vérifie alors aisément que pour chacune des fonctions  $c_{\nu,k}^\perp$  précédemment définies,

$$\langle c_{\nu,k}^\perp(t), \tilde{h}_a(t)^* \rangle = f_{\nu,k}.$$

Pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$  et pour tout  $k \in \{0, \dots, \kappa(\bar{\nu}^L)\}$ , nous évaluons maintenant le produit scalaire  $\langle c_\nu(kT_s - t), \tilde{h}_a(t)^* \rangle$  :

$$\langle c_\nu(kT_s - t), \tilde{h}_a(t)^* \rangle = \langle c_{\nu,k}^\perp(t), \tilde{h}_a(t)^* \rangle + \langle c_\nu(kT_s - t) - c_{\nu,k}^\perp(t), \tilde{h}_a(t)^* \rangle.$$

La différence  $c_\nu(kT_s - t) - c_{\nu,k}^\perp(t)$  appartient à  $\mathcal{E}'^\perp$ . Comme  $\tilde{h}_a(t)^*$  est un élément de  $\mathcal{E}'$ , on obtient donc que  $\langle c_\nu(kT_s - t) - c_{\nu,k}^\perp(t), \tilde{h}_a(t)^* \rangle = 0$ . Par conséquent, pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$  et pour tout  $k \in \{0, \dots, \kappa(\bar{\nu}^L)\}$ ,

$$\langle c_\nu(kT_s - t), \tilde{h}_a(t)^* \rangle = f_{\nu,k}. \quad (\text{B.105})$$

En outre,  $\tilde{h}_a(t)^*$  appartient à  $\mathcal{E}'$  et donc à  $\mathcal{D}^\perp$ . Ceci implique que pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$  et pour tout  $k \notin \{0, \dots, \kappa(\bar{\nu}^L)\}$ ,

$$\langle c_\nu(kT_s - t), \tilde{h}_a(t)^* \rangle = 0. \quad (\text{B.106})$$

Les deux égalités (B.105) et (B.106) montrent que la fonction  $\tilde{h}_a(t)$  ainsi construite possède bien les propriétés voulues.

### ■ Vérification de la proposition B.5 dans des cas usuels

Soit  $(\lambda_{\nu,k})_{\nu \in \mathcal{P}_L, k \in \{0, \dots, \kappa(\bar{\nu}^L)\}}$  une famille de coefficients complexes tels que :

$$t \rightarrow \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \sum_{k=0}^{\kappa(\bar{\nu}^L)} \lambda_{\nu,k} c_{\nu,k}^\perp(t) = 0.$$

Puisque  $c_{\nu,k}^\perp(t)$  est le projeté orthogonal de  $c_\nu(kT_s - t)$  sur  $\mathcal{D}^\perp$ , nous pouvons donc écrire que

$$\sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \sum_{k=0}^{\kappa(\bar{\nu}^L)} \lambda_{\nu,k} c_\nu(kT_s - t) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \sum_{k=0}^{\kappa(\bar{\nu}^L)} \lambda_{\nu,k} \left( c_\nu(kT_s - t) - c_{\nu,k}^\perp(t) \right)$$

est une combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{D}$ , et donc appartient à  $\mathcal{D}$ . Autrement dit, il existe un élément  $d(t) \in \mathcal{D}$  tel que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \sum_{k=0}^{\kappa(\bar{\nu}^L)} \lambda_{\nu,k} c_\nu(kT_s - t) + d(t) = 0. \quad (\text{B.107})$$

En particulier, l'équation ci-dessus est vraie pour tout  $t \in [-(L+1)T_s, LT_s]$ . Or, pour tout  $t$  appartenant à cet intervalle,  $d(t)$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions de la forme  $c_\nu(kT_s - t)$ . Ceci est dû au fait que chaque fonction  $t \rightarrow c_\nu(kT_s - t)$  est à support compact. On peut en effet vérifier grâce à la condition (B.101) que pour tout  $d(t) \in \mathcal{D}$ , il existe une famille finie de coefficients  $(\lambda_{\nu,k})_{\nu \in \mathcal{P}_L, k \in \{-L, \dots, -1\}}$  telle que pour tout  $t \in [-(L+1)T_s, LT_s]$ ,

$$d(t) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \sum_{k=-L}^{-1} \lambda_{\nu,k} c_\nu(kT_s - t).$$

En injectant l'équation ci-dessus dans (B.107), on obtient finalement que pour tout  $t \in [-(L+1)T_s, LT_s]$ ,

$$\sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \sum_{k=-L}^{\kappa(\bar{\nu}^L)} \lambda_{\nu,k} c_\nu(kT_s - t) = 0. \quad (\text{B.108})$$

Nous avons vérifié par des moyens informatiques que cette proposition est vraie pour des cas usuels. En effet, soit  $P$  un entier supérieur à  $2^L L$ . Soit alors  $(t_j)_{j \in \{0 \dots P\}}$  une subdivision de l'intervalle  $[-(L+1)T_s, LT_s]$  telle que  $-(L+1)T_s = t_0 < t_1 < \dots < t_P = LT_s$  et telle que  $t_j - t_{j-1}$  est une constante par rapport à  $j$ . On définit par  $\mathbf{c}_\nu(k)$  le vecteur de dimension  $P+1$  dont les composantes sont les valeurs  $c_\nu(kT_s - t_j)$ . Pour des modulations CPM particulières (nous avons effectué les tests pour des modulations 2RC, 3RC ou 4RC), nous avons montré, en calculant par des moyens informatiques le rang de la famille de vecteurs  $(\mathbf{c}_\nu(k))_{\nu \in \mathcal{P}_L, k \in \{-L \dots \kappa(\bar{\nu}^L)\}}$ , que cette famille est libre. Or, puisque l'équation (B.108) est vraie pour tout  $t_j$ ,  $j \in \{0 \dots P\}$ , on obtient directement la nullité de tous les coefficients  $(\lambda_{\nu, k})_{\nu \in \mathcal{P}_L, k \in \{-L \dots \kappa(\bar{\nu}^L)\}}$ . Ceci conduit au résultat souhaité.

## B.7 Preuve de la proposition 3.5

Nous avons montré dans l'annexe B.5 que l'ensemble  $\mathcal{F}(\{-1, +1\}^L, \mathbb{C})$  des fonctions de  $\{-1, +1\}^L$  dans  $\mathbb{C}$  est un espace vectoriel de dimension  $2^L$ . En outre nous savons d'après le lemme B.5 que la famille de fonctions

$$\left( (a_n, \dots, a_{n-L+1}) \rightarrow \exp \left[ i\pi h \sum_{j \in \omega} a_{n-j} \right] \right)_{\omega \in \mathcal{Q}_L} \quad (\text{B.109})$$

est libre. Comme elle contient en outre un nombre d'éléments égal à la dimension de  $\mathcal{F}(\{-1, +1\}^L, \mathbb{C})$ , nous en déduisons qu'il s'agit d'une base de  $\mathcal{F}(\{-1, +1\}^L, \mathbb{C})$ . Par conséquent, pour toute fonction  $\theta \in \mathcal{F}(\{-1, +1\}^L, \mathbb{C})$ , il existe une unique famille de coefficients  $(\lambda_\omega)_{\omega \in \mathcal{Q}_L}$  telle que, quels que soient  $a_n, \dots, a_{n-L+1}$ ,

$$e^{i\theta(a_n, \dots, a_{n-L+1})} = \sum_{\omega \in \mathcal{Q}_L} \lambda_\omega \exp \left[ i\pi h \sum_{j \in \omega} a_{n-j} \right]. \quad (\text{B.110})$$

La démarche consiste à réorganiser la somme précédente. On peut en effet écrire tout  $\omega \in \mathcal{P}_L$  différent de l'ensemble vide sous la forme :

$$\omega = \{\min(\omega), \omega'\}$$

où  $\omega'$  est un sous-ensemble de  $\{\min(\omega)+1, \dots, L-1\}$ . Nous appelons  $\mathcal{P}(\min(\omega)+1, \dots, L-1)$  l'ensemble des parties de  $\{\min(\omega)+1, \dots, L-1\}$ . Notons en outre que  $\min(\omega)$  décrit l'ensemble  $\{0, 1, \dots, L-1\}$  lorsque  $\omega$  varie dans  $\mathcal{Q}_L \setminus \emptyset$ . D'après les remarques précédentes, (B.110) revient à :

$$\begin{aligned} e^{i\theta(a_n, \dots, a_{n-L+1})} &= \lambda_\emptyset + \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{Q}_L \setminus \emptyset \\ \min(\omega) = k}} \lambda_\omega \exp \left[ i\pi h \sum_{j \in \omega} a_{n-j} \right] \\ &= \lambda_\emptyset + \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{\omega' \in \mathcal{P}(k+1 \dots L-1)} \lambda_{\{k, \omega'\}} \exp \left[ i\pi h \left( a_{n-k} + \sum_{j \in \omega'} a_{n-j} \right) \right]. \end{aligned}$$

Introduisons la notation suivante. Pour  $k$  fixé et pour tout  $\nu$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{P}(1, \dots, L-1-k)$  des parties de  $\{1, \dots, L-1-k\}$ , on désigne par  $\nu+k$  l'ensemble

dont les éléments correspondent à ceux de  $\nu$  incrémentés de  $k$ . Il va de soit que pour tout  $\omega' \in \mathcal{P}(k+1, \dots, L-1)$ , il existe un unique  $\nu \in \mathcal{P}(1, \dots, L-1-k)$  tel que  $\omega' = \nu + k$ . On effectue alors le changement de variable  $\omega' \rightarrow \nu$  :

$$e^{i\theta(a_n, \dots, a_{n-L+1})} = \lambda_\emptyset + \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}(1 \dots L-1-k)} \lambda_{\{k, \nu+k\}} \exp \left[ i\pi h \left( a_{n-k} + \sum_{j \in \nu} a_{n-k-j} \right) \right].$$

Nous appelons  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  le signal à temps discret défini pour tout  $n$  par :

$$z(n) = \exp \left[ i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-L} a_j + i\theta(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-L+1}) \right]. \quad (\text{B.111})$$

Ce signal peut être mis sous la forme :

$$z(n) = \lambda_\emptyset \exp \left[ i\pi h \sum_{j=-\infty}^{n-L} a_j \right] + \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}(1 \dots L-1-k)} \lambda_{\{k, \nu+k\}} \exp \left[ i\pi h \left( a_{n-k} + \sum_{j \in \nu} a_{n-k-j} + \sum_{j=-\infty}^{n-L} a_j \right) \right],$$

ce que l'on peut écrire plus simplement :

$$z(n) = \lambda_\emptyset x_{\{1 \dots L-1\}}(n-L) + \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{\nu \in \mathcal{P}(1 \dots L-1-k)} \lambda_{\{k, \nu+k\}} x_{\{\nu, L-k \dots L-1\}}(n-k), \quad (\text{B.112})$$

Pour tout  $k \in \{0, \dots, L-1\}$  et pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , nous notons  $f_{\nu, k}$  le coefficient défini par

- $f_{\nu, k} = \lambda_{\{k, \nu+k\}}$  si  $\nu \in \mathcal{P}(1 \dots L-1-k)$ ,
- $f_{\nu, k} = 0$  sinon.

Nous posons en outre  $f_{\{1 \dots L-1\}, L} = \lambda_\emptyset$  et  $f_{\nu, L} = 0$  pour tout  $\nu \neq \{1 \dots L-1\}$ . Enfin, pour tout  $k \notin \{0, \dots, L\}$  et pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , on pose  $f_{\nu, k} = 0$ . En injectant ces notations dans l'expression (B.112), on obtient que pour tout  $n$ ,

$$z(n) = \sum_{k=0}^L \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} f_{\nu, k} x_\nu(n-k). \quad (\text{B.113})$$

Nous constatons immédiatement que la famille de filtres numériques

$$\left( f_\nu(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{\nu, k} z^{-k} \right)_{\nu \in \mathcal{P}_L}$$

vérifie les hypothèses de la proposition 3.4 et appartient donc à  $\mathcal{G}_L$  dans des cas usuels. Finalement,  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  peut s'écrire sous la forme :

$$z(n) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} [f_\nu(z)] x_\nu(n), \quad (\text{B.114})$$

où  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  appartient à  $\mathcal{G}_L$ . Donc le signal  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifie la condition (3.63). Par ailleurs, la condition (3.64) est également vérifiée par définition de  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ .

---

## Annexe C

# Annexe relative au chapitre 4

### Preuve du résultat 4.1

Nous montrons ici que si la période d'échantillonnage  $T_e$  est différente de  $T_s$ , alors  $\Upsilon(T_e) > 0$ , tant pour les CPM à réponse complète que pour les CPM à réponse partielle. Nous nous plaçons dans le cas général de CPM à réponse partielle, qui inclut le cas de CPM à réponse complète.

Nous désignons par  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  la suite des échantillons du signal reçu :  $y(n) = y_a(nT_e)$  pour tout  $n$ . Un filtre numérique  $g(z) = \sum_k g_k z^{-k}$  fonctionnant à la cadence  $T_e$  est appliqué à  $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ . Le signal de sortie  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est défini par :

$$z(n) = [g(z)]y(n).$$

On peut voir le signal à temps discret  $(z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  comme une version échantillonnée d'un signal à temps continu  $z_a(t)$ . On peut en effet poser

$$z(n) = z_a(nT_e) \tag{C.1}$$

pour tout  $n$ , où  $z_a(t)$  est le signal analogique défini pour tout  $t$  par

$$z_a(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k y_a(t - kT_e). \tag{C.2}$$

En outre, la représentation de Laurent (2.13) permet d'écrire le signal  $y_a(t)$  de la manière suivante :

$$y_a(t) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_\nu(n) \tilde{h}_\nu(t - nT_s) \right), \tag{C.3}$$

où pour tout  $\nu \in \mathcal{P}_L$ , le filtre  $\tilde{h}_\nu(t)$  correspond au produit de convolution entre la fonction de mise en forme de Laurent  $c_\nu(t)$  et la réponse impulsionnelle du canal  $h_a(t)$ . En posant enfin pour tout  $t$  :

$$f_\nu(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \tilde{h}_\nu(t - kT_e),$$

nous pouvons finalement écrire le signal  $z_a(t)$  de la manière suivante :

$$z_a(t) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_L} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_\nu(n) f_\nu(t - nT_s) \right), \tag{C.4}$$

Par hypothèse, le canal de transmission tient compte d'un filtrage passe-bas d'émission ou de réception dans la bande de fréquences  $[-B, B]$ , où  $B < \frac{1}{T_s}$ . Ceci implique que la transformée de Fourier  $F_\nu(f)$  de  $f_\nu(t)$  a également pour support l'intervalle  $[-B, B]$ .

Il est clair que la fonction  $\Upsilon(T_e)$  est positive ou nulle. Nous montrons que si  $T_e$  n'est pas un multiple de  $T_s$ , alors  $\Upsilon(T_e)$  est strictement positif. Ceci revient à montrer que si  $T_e$  n'est pas un multiple de  $T_s$ , alors la condition de module constant en sortie de l'égaliseur ne peut pas être vérifiée.

Soit  $T_e$  une période d'échantillonnage telle que  $T_e$  n'est pas un multiple de  $T_s$ . Supposons par l'absurde que le signal en sortie de l'égaliseur est de module constant. Les résultats du paragraphe 3.5 permettent d'affirmer la chose suivante. Soit  $\nu$  un élément fixé et quelconque de  $\mathcal{P}_L$ .

**Si  $T_e/T_s$  est rationnel.** Disons que  $T_e/T_s = \frac{p}{q}$ ,  $p$  et  $q$  premiers entre eux et  $q \geq 2$  par hypothèse. Alors, pour tout  $j \in \{0, \dots, q-1\}$ , la famille de coefficients

$$\left( f_\nu\left(j\frac{T_s}{q} + kT_s\right) \right)_{k \in \mathbb{Z}}$$

comporte au plus  $2L$  coefficients non nuls.

**Si  $T_e/T_s$  est irrationnel.** Alors pour tout  $\tau \in [0, T_s[$ , la famille  $(f_\nu(\tau + kT_s))_{k \in \mathbb{Z}}$  comporte au plus  $2L$  coefficients non nuls. Soit alors  $q$  un entier supérieur à 2. La propriété est en particulier vraie pour tout  $\tau \in \{0, \frac{T_s}{q}, \dots, (q-1)\frac{T_s}{q}\}$ . Donc, comme dans le cas où  $T_e/T_s$  est rationnel, il existe un entier  $q \geq 2$  tel que pour tout  $j \in \{0, \dots, q-1\}$ , la famille de coefficients

$$\left( f_\nu\left(j\frac{T_s}{q} + kT_s\right) \right)_{k \in \mathbb{Z}}$$

comporte au plus  $2L$  coefficients non nuls. Notons que cette "discrétisation" un peu artificielle est utilisée uniquement afin de pouvoir traiter simultanément les deux cas de figure  $T_e/T_s$  rationnel et  $T_e/T_s$  irrationnel.

Nous appliquons la formule de Poisson à la fonction  $f_\nu(t)$  échantillonnée au rythme  $\frac{T_s}{q}$  :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_\nu\left(n\frac{T_s}{q}\right) e^{-2i\pi n \frac{T_s}{q} f} = \frac{q}{T_s} \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_\nu\left(f - n\frac{q}{T_s}\right). \quad (\text{C.5})$$

L'équation ci-dessus est vraie car la condition de Shannon est vérifiée. En effet, comme  $q \geq 2$ , on peut écrire que  $\frac{q}{2T_s} \geq \frac{1}{T_s} > B$ , où l'on rappelle que  $B$  correspond à la bande unilatérale de  $F_\nu(f)$ . Par définition de  $B$ , nous savons par ailleurs que pour tout  $f \in [B, \frac{q}{2T_s}]$ ,  $F_\nu(f) = 0$ . On constate alors que le membre de droite de l'équation (C.5) est nul pour tout  $f \in [B, \frac{q}{2T_s}]$ . Or, comme le support de la famille de coefficients  $\left(f_\nu\left(n\frac{T_s}{q}\right)\right)_{n \in \mathbb{Z}}$  est fini, la fonction

$$f \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_\nu\left(n\frac{T_s}{q}\right) e^{-2i\pi n \frac{T_s}{q} f} \quad (\text{C.6})$$

est un polynôme trigonométrique. Ce polynôme s'annule sur un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, il est identiquement nul. Ceci implique que tous les coefficients de la famille  $\left(f_\nu\left(n\frac{T_s}{q}\right)\right)_{n \in \mathbb{Z}}$  sont nuls. L'affirmation est vraie quel que soit  $\nu \in \mathcal{P}_L$ . Finalement,

tous les filtres de la famille  $(f_\nu(z))_{\nu \in \mathcal{P}_L}$  coïncident avec le filtre nul. Ceci est évidemment contraire à la condition de module 1.

Donc le signal en sortie de l'égaliseur ne peut pas être de module constant égal à 1, ce qui implique que  $\Upsilon(T_e) > 0$ .



---

## Annexe D

# Annexe relative au chapitre 5

### D.1 Preuve de la proposition 5.2

On peut démontrer (5.11) en posant  $S = 2NT_s$ , où  $N \in \mathbb{N}$ , et en faisant tendre  $N$  vers l'infini. On écrit alors que :

$$\frac{1}{2NT_s} \int_0^{2NT_s} (s_a(t)^g - E(s_a(t)^g)) e^{-2i\pi \frac{t}{2T_s}} dt = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi_n, \quad (\text{D.1})$$

où  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la série temporelle définie par

$$\xi_n = \frac{1}{2T_s} \int_0^{2T_s} (s_a(t + 2nT_s)^g - E(s_a(t + 2nT_s)^g)) e^{-2i\pi \frac{t}{2T_s}} dt$$

pour tout  $n$ . On peut alors montrer que  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de moyenne nulle qui vérifie la loi forte des grands nombres : en d'autres termes, la somme  $\mathfrak{S}_N$  définie par :

$$\mathfrak{S}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi_n,$$

converge vers  $E(\xi_0) = 0$ . Afin de justifier l'affirmation précédente, nous mentionnons le fait que  $E(|\mathfrak{S}_N|^4) = O(\frac{1}{N^2})$ . Grâce au lemme de Borel-Cantelli, cette condition implique que  $\mathfrak{S}_N$  converge presque sûrement vers zéro. Autrement dit,  $\frac{1}{S} \int_0^S s_a(t)^g e^{-2i\pi \frac{t}{2T_s}} dt$  converge presque sûrement vers  $\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S E(s_a(t)^g) e^{-2i\pi \frac{t}{2T_s}} dt$  si  $S$  tend vers l'infini. Or, pour tout  $g$ ,  $s_a(t)^g$  peut être vu comme un signal CPM d'indice  $hg$ . Finalement, la Proposition 5.1 implique que

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S E(s_a(t)^g) e^{-2i\pi \frac{t}{2T_s}} dt \neq 0$$

seulement si  $g$  est un multiple impair de  $g_0 = \frac{1}{h}$ .

### D.2 Preuve du lemme 5.1

As  $J_n(g_0) = |r_N(g_0)|^2$ ,  $J'_N(g_0)$  can be written as follows :

$$J'_N(g_0) = r'_N(g_0)r_N(g_0)^* + r'_N(g_0)^*r_N(g_0). \quad (\text{D.2})$$

In order to obtain a more convenient expression of  $r'_N(g_0)$ , we need to rewrite  $\exp[ig_0\psi(nM+m)]$ , for each  $n = 0 \dots N-1$  and  $m = 0 \dots M-1$ . Expanding the right-hand side of (5.16), we remark that  $(-1)^n \exp[ig_0\psi(nM+m)]$  can be written as

$$(-1)^n \exp[ig_0\psi(nM+m)] = \lambda(m) + \epsilon(nM+m) \quad (\text{D.3})$$

where  $\lambda(m)$  is the deterministic constant defined by  $\lambda(m) = \prod_{j=0}^{L-1} \cos(\pi\phi_{j,m})$  and where  $\epsilon(nM+m)$  represents a random variable of zero mean which is defined as follows :

$$\epsilon(nM+m) = \sum_{p=1}^L i^p \sum_{\nu_p \in \mathcal{N}_p} \beta(\nu_p, m) \prod_{j \in \nu_p} a_{n-j}, \quad (\text{D.4})$$

where for each  $p \geq 1$ ,  $\mathcal{N}_p$  denotes the set

$$\mathcal{N}_p = \left\{ (j_1, \dots, j_p) \in \{0, \dots, L-1\}^p / j_1 < j_2 < \dots < j_p \right\}, \quad (\text{D.5})$$

and where coefficients  $\beta(\nu_p, m)$  are defined for each  $\nu_p \in \mathcal{N}_p$  and for each  $m = 0 \dots M-1$  by

$$\beta(\nu_p, m) = \prod_{j \in \nu_p} \sin(\pi\phi_{j,m}) \prod_{j \in \{0, \dots, L-1\} \setminus \nu_p} \cos(\pi\phi_{j,m}). \quad (\text{D.6})$$

As  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  is a zero mean i.i.d. sequence,  $\epsilon$  is a zero mean periodically correlated sequence of period  $M$ . In order to evaluate  $r'_N$  at the point  $g_0$ , we note that (5.15) leads to

$$r'_N(g) = \frac{i}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \psi(nM+m) \exp[ig\psi(nM+m)] (-1)^n e^{-i\pi \frac{m}{M}}. \quad (\text{D.7})$$

Noticing that  $e^{-2i\pi \frac{nM+m}{2M}}$  coincides with  $(-1)^n e^{-i\pi \frac{m}{M}}$  and using (5.3) and (D.3), one can rewrite (D.7) as

$$\begin{aligned} r'_N(g_0) &= \frac{i\pi h}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right) (\lambda(m) + \epsilon(nM+m)) e^{-i\pi \frac{m}{M}} \\ &+ \frac{i\pi h}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{j=0}^{L-1} a_{n-j} \phi_{j,m} \right) \lambda(m) e^{-i\pi \frac{m}{M}} \\ &+ \frac{i\pi h}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{j=0}^{L-1} a_{n-j} \phi_{j,m} \right) \epsilon(nM+m) e^{-i\pi \frac{m}{M}}. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

We first study the asymptotic behavior of the third term of the right-hand side of (D.8). For each  $j = 0 \dots L-1$  and for each  $m = 0 \dots M-1$ , (D.4) yields

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_{n-j} \epsilon(nM+m) = i\beta(\{j\}, m) + \sum_{p=1}^L i^p \sum_{\nu_p \in \mathcal{N}_p \setminus \{j\}} \beta(\nu_p, m) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_{n-j} \prod_{k \in \nu_p} a_{n-k}. \quad (\text{D.9})$$

Given a set  $\nu_p \in \mathcal{N}_p$ , we obtain easily that  $E(a_{n-j} \prod_{k \in \nu_p} a_{n-k}) = 0$  as long as  $\nu_p$  is different from the singleton set  $\{j\}$ . In this case, the classical central limit theorem implies that

the random variable  $\frac{1}{N^{1/2}} \sum_{n=0}^{N-1} a_{n-j} \prod_{k \in \nu_p} a_{n-k}$  converges in distribution toward a zero mean Gaussian variable. Thus, (D.9) can also be written as :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_{n-j} \epsilon(nM + m) = i\beta(\{j\}, m) + O_P\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right). \quad (\text{D.10})$$

We now consider the second term of the right-hand side of (D.8). The central limit theorem can be used again to assert that for each  $j = 0 \dots L - 1$  and for each  $m = 0 \dots M - 1$  :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_{n-j} \lambda(m) e^{-i\pi \frac{m}{M}} = O_P\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right). \quad (\text{D.11})$$

Thus the second term of (D.8) corresponds also to  $O_P\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right)$ . A more convenient expression of  $r'_N(g_0)$  can be obtained by considering sequence  $\tilde{\epsilon}(n) = \frac{1}{M} \sum \epsilon(nM + m) e^{-i\pi \frac{m}{M}}$  and by using constant  $\lambda$  which is defined by (5.18) as the mean w.r.t.  $m$  of coefficients  $\lambda(m) e^{-i\pi \frac{m}{M}}$ . Using the previous remarks, we obtain finally :

$$r'_N(g_0) = \frac{i\pi h \lambda}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{n-L} a_j + \frac{i\pi h}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right) \tilde{\epsilon}(n) - \gamma + O_P\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right), \quad (\text{D.12})$$

where

$$\gamma = \frac{\pi h}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{L-1} \beta(\{j\}, m) \phi_{j,m} e^{-i\pi \frac{m}{M}}.$$

It can be shown that the behavior of the second term of the right-hand side of (D.12) is such as :

$$\frac{i\pi h}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right) \tilde{\epsilon}(n) = O_P(1).$$

Now we plug the final expressions of  $r_N(g_0)$  and  $r'_N(g_0)$  (given by (5.17) and (D.12)) into (D.2). Noticing that

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\epsilon}(n) = O_P\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right),$$

we obtain the following result :

$$\begin{aligned} J'_N(g_0) = & 2\text{Re} \left[ \lambda \left( \frac{-i\pi h}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right) \tilde{\epsilon}(n)^* \right) \right. \\ & \left. - \lambda \gamma^* + \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\epsilon}(n) \right) \left( \frac{-i\pi h \lambda^*}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right) \right] + O_P\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right). \quad (\text{D.13}) \end{aligned}$$

Considering sequence  $\bar{\epsilon}(n) = \frac{1}{\rho} i(\lambda \tilde{\epsilon}(n)^* - \lambda^* \tilde{\epsilon}(n))$  and writing  $\lambda$  in the polar form  $\lambda = \rho e^{i\theta}$ ,  $J'_N(g_0)$  can finally be written as

$$\begin{aligned} J'_N(g_0) = & -\frac{\pi h \rho}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right) \bar{\epsilon}(n) + \pi h \rho \mu \\ & + \left( \frac{\pi h \rho}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{\epsilon}(n) \right) \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right) + O_P\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right), \quad (\text{D.14}) \end{aligned}$$

where  $\mu$  is defined by (5.20).

### D.3 Preuve du lemme 5.2

We first note that :

$$J''_N(g_0) = r''_N(g_0)r_N(g_0)^* + r''_N(g_0)^*r_N(g_0) + 2r'_N(g_0)r'_N(g_0)^*. \quad (\text{D.15})$$

Using (D.7),  $r''_N(g)$  can be written as follows :

$$r''_N(g) = \frac{-1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \psi(nM+m)^2 \exp[ig\psi(nM+m)] (-1)^n e^{-i\pi \frac{m}{M}}. \quad (\text{D.16})$$

We now evaluate  $r''_N(g_0)/N$  by plugging (5.3) into (D.16) :

$$\frac{r''_N(g_0)}{N} = \frac{r''_{N,1}(g_0)}{N} + \frac{r''_{N,2}(g_0)}{N} + \frac{r''_{N,3}(g_0)}{N}, \quad (\text{D.17})$$

where

$$\frac{r''_{N,1}(g_0)}{N} = \frac{-\pi^2 h^2}{N^2 M} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right)^2 e^{ig_0 \psi(nM+m)} (-1)^n e^{-i\pi \frac{m}{M}}, \quad (\text{D.18})$$

$$\frac{r''_{N,2}(g_0)}{N} = \frac{-2\pi^2 h^2}{N^2 M} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right) \left( \sum_{j=0}^{L-1} a_{n-j} \phi_{j,m} \right) e^{ig_0 \psi(nM+m)} (-1)^n e^{-i\pi \frac{m}{M}} \quad (\text{D.19})$$

$$\frac{r''_{N,3}(g_0)}{N} = \frac{-\pi^2 h^2}{N^2 M} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{j=0}^{L-1} a_{n-j} \phi_{j,m} \right)^2 e^{ig_0 \psi(nM+m)} (-1)^n e^{-i\pi \frac{m}{M}}. \quad (\text{D.20})$$

$r''_N(g_0)/N$  has actually the same asymptotic behavior than  $r''_{N,1}(g_0)/N$ . In order to prove this claim, we study the asymptotic behavior of  $r''_{N,k}(g_0)/N$  for each  $k = 1, 2, 3$ . We first consider the third term  $r''_{N,3}(g_0)/N$ . As  $|r''_{N,3}(g_0)/N| \leq \frac{\pi^2 h^2 L^2}{N}$ ,  $r''_{N,3}(g_0)/N$  converges toward zero as  $N$  tends to infinity. In order to study the asymptotic behavior of the second term  $r''_{N,2}(g_0)/N$ , we need to consider the following stochastic process : we define  $W_1^{(N)}(t) = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{j=0}^{[Nt]} a_{j-L}$  for each  $t \in [0, 1]$ . The functional central limit theorem states that  $W_1^{(N)}(t)$  converges in distribution toward a Brownian motion, say  $W_1(t)$ . Therefore, the random variable

$$\frac{1}{N^{3/2}} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right| = \int_0^1 |W_1^{(N)}(t)| dt$$

converges in distribution toward  $\int_0^1 |W_1(t)| dt$ . Since

$$\left| \frac{r''_{N,2}(g_0)}{N} \right| \leq \frac{2\pi^2 h^2 L^2}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right|,$$

we obtain that  $r''_{N,2}(g_0)/N = o_P(1)$ . We finally study the asymptotic behavior of  $r''_{N,1}(g_0)/N$ . Plugging (D.3) into (D.18) leads to write  $r''_{N,1}(g_0)/N$  as a sum of two terms, say  $r''_{N,11}(g_0)/N$  and  $r''_{N,12}(g_0)/N$ , which are given by :

$$\begin{aligned}\frac{r''_{N,11}(g_0)}{N} &= \frac{-\pi^2 h^2}{N^2 M} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right)^2 \epsilon(nM + m) e^{-i\pi \frac{m}{M}} \\ \frac{r''_{N,12}(g_0)}{N} &= \frac{-\pi^2 h^2}{N^2 M} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right)^2 \lambda(m) e^{-i\pi \frac{m}{M}}\end{aligned}$$

We now show that  $r''_{N,11}(g_0)/N$  converges toward zero in probability as  $N \rightarrow \infty$ . To that end, we use the functional central limit theorem in order to prove that  $r''_{N,11}(g_0)$  converges in distribution toward a certain random variable : this implies indeed that  $r''_{N,11}(g_0) = O_P(1)$  and thus, that  $r''_{N,11}(g_0)/N$  converges toward zero in probability. First, we note that :

$$\frac{r''_{N,11}(g_0)}{N} = \frac{-\pi^2 h^2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{p=1}^L i^p \sum_{\nu_p \in \mathcal{N}_p} \beta(\nu_p, m) e^{-i\pi \frac{m}{M}} \left( \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right)^2 \prod_{k \in \nu_p} a_{n-k} \right),$$

and we define for each  $p = 1 \dots L$  and for each set  $\nu_p \in \mathcal{N}_p$ ,

$$W_{\nu_p}^{(N)}(t) = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{n=0}^{[Nt]} \prod_{k \in \nu_p} a_{n-k-1}.$$

The functional central limit theorem asserts that the 2-dimensional stochastic process  $(W^{(N)}(t), W_{\nu_p}^{(N)}(t))^T$  converges toward the 2-dimensional Brownian motion  $[W(t), W_{\nu_p}(t)]^T$ . Thus, the following random variable

$$\frac{1}{N^{3/2}} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right)^2 \prod_{k \in \nu_p} a_{n-k} = \int_0^1 \left( W^{(N)}(t) \right)^2 dW_{\nu_p}^{(N)}(t)$$

converges in distribution toward  $\int_0^1 W(t)^2 dW_{\nu_p}(t)$ . Therefore,  $r''_{N,11}(g_0)/N$  converges toward zero in probability as  $N$  tends to infinity. Therefore,  $r''_N(g_0)$  reduces to

$$\frac{r''_N(g_0)}{N} = \frac{-\lambda \pi^2 h^2}{N^2 M} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right)^2 + o_P(1). \quad (\text{D.21})$$

Note that  $r_N(g_0)$  can be written in the following form :

$$r_N(g_0) = \lambda + o_P(1), \quad (\text{D.22})$$

and that (D.12) can be rewritten as :

$$\frac{r'_N(g_0)}{N^{1/2}} = \frac{i\pi h \lambda}{N^{3/2}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{n-L} a_j + o_P(1). \quad (\text{D.23})$$

Plugging (D.21), (D.22) and (D.23) into (D.15) we obtain the final result :

$$\frac{J''_N(g_0)}{N} = 2\rho^2 (\pi h)^2 \left( \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right)^2 - \frac{1}{N^3} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{n-L} a_j \right)^2 \right) + o_P(1).$$

## D.4 Preuve de la proposition 5.4

It is easy to check that

$$\lambda \rightarrow \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \cos \pi \phi_a(t) e^{-i\pi t/T_s} dt .$$

Using property (5.27), it can be shown that  $\frac{2}{T_s} \int_0^{T_s} \sin \pi \phi_a(t) \cos(\pi t/T_s) dt = 0$ . Therefore,  $\lambda$  converges a strictly positive real number given by

$$\lambda \rightarrow \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \cos \pi \phi_a(t) \cos \pi t/T_s dt .$$

$\theta$  thus tends to zero. Moreover, it is easy to check that

$$\mu \rightarrow \frac{2}{T_s} \int_0^{T_s/2} (1 - 2\phi_a(t)) \sin \pi \phi_a(t) \cos \pi t/T_s dt .$$

Finally,  $\bar{\epsilon}(n) \rightarrow \left[ \frac{2}{T_s} \int_0^{T_s} \sin \pi \phi_a(t) \cos(\pi t/T_s) dt \right] a_n = 0$ . This implies that the second component  $W_2(t)$  of Brownian process  $\mathbf{W}(t)$  is actually equal to zero when the oversampling factor  $M$  tends to infinity. This remark leads immediately to (5.30).

---

# Table des figures

1.1	Schéma synoptique de la chaîne de transmission . . . . .	6
2.1	Taux d'erreur binaire - Modulation 3RC - $h = 0.571$ . . . . .	21
2.2	Taux d'erreur binaire - Modulation 3RC - Démodulation cohérente - $h = 0.571$	22
2.3	Taux d'erreur binaire - Modulations 1RC et 1REC - $h = 0.571$ . . . . .	22
2.4	Influence de l'indice sur les $TEB$ - Modulation 3RC . . . . .	23
2.5	Taux d'erreur binaire - Modulation 3RC - Démodulation 1RC - $h = 0.571$ .	23
2.6	Taux d'erreur binaire - Modulation 1REC - Démodulation 1RC - $h = 0.571$	24
3.1	Schéma synoptique . . . . .	35
3.2	Module de la solution $f(t)$ . . . . .	46
3.3	Exemple typique de canal de transmission considéré . . . . .	58
3.4	Constellations observées - Modulation 1RC . . . . .	59
3.5	Constellations observées dans le cas bruité ( $E_b/N_0 = 25\text{dB}$ ) - Modulation 1RC - $h = 0.7$ . . . . .	60
3.6	Distribution empirique des $TEB$ - $E_b/N_0 = 10\text{dB}$ - Modulation 3RC - $h = 0.7$	62
3.7	Distribution empirique des $TEB$ - $E_b/N_0 = 10\text{dB}$ - Modulation 1REC - $h = 0.5$ . . . . .	62
3.8	Répartition des taux d'erreur binaire aberrants - Égalisation de Wiener - $E_b/N_0 = 10\text{dB}$ . . . . .	63
3.9	Répartition des taux d'erreur binaire aberrants - Égalisation par CMA - Modulation 3RC - $h = 0.7$ . . . . .	63
3.10	Répartition des taux d'erreur aberrants - Égalisation par CMA - Modulation 1REC - $h = 0.5$ . . . . .	64
4.1	Génération de la fonction de coût $\Upsilon(T_e)$ . . . . .	76
5.1	Histogramme normalisé de $N(\hat{h}_N - h)/h$ et distribution limite théorique - modulation 1REC - $\tau = 0.21T_s$ . . . . .	98
5.2	Histogramme normalisé de $N(\hat{h}_N - h)/h$ et distribution limite théorique - modulation 3RC - $\tau = 0.21T_s$ . . . . .	99
5.3	Histogramme normalisé de $N(\hat{h}_N - h)/h$ et distribution limite théorique - modulation 3RC - $\tau = 0.21T_s$ . . . . .	99
5.4	$\Delta_\infty$ et $\sigma_\infty$ en fonction de $\tau$ - signaux 1REC - Cas non bruité . . . . .	100
5.5	$\Delta_\infty$ et $\sigma_\infty$ en fonction de $\tau$ - signaux 3RC - Cas non bruité . . . . .	100
5.6	Performances théoriques et empiriques en fonction de $E_b/N_0$ . . . . .	101
5.7	Erreurs quadratiques moyennes en fonction de $E_b/N_0$ - $N = 1000$ , $h = 0.7$ , $M = 1$ . . . . .	102

---

5.8	Erreur quadratique moyenne en fonction de $N$ - $E_b/N_0 = 15\text{dB}$ , $h = 0.7$ , $M = 1$ . . . . .	103
6.1	Schéma synoptique de la chaîne complète . . . . .	105
6.2	Répartition des taux d'erreur aberrants - $E_b/N_0 = 15\text{dB}$ . . . . .	109
6.3	Histogramme normalisé de l'erreur d'estimation sur l'indice - $E_b/N_0 = 15\text{dB}$	110
A.1	Histograms of the estimation error and limit pdf - 3RC signals - $E_b/N_0 = 25\text{dB}$	127
A.2	Histograms of the estimation error and limit pdf - 3RC signals - $E_b/N_0 = 15\text{dB}$	128
A.3	Histograms of the estimation error and limit pdf - 1REC signals - $E_b/N_0 =$ $25\text{dB}$ . . . . .	128

---

# Liste des tableaux

3.1	Variations de la fonction $\theta(t)$ sur $[0, T_s[$ . . . . .	46
3.2	Taux d'erreur binaire moyens (hors réalisations catastrophiques) - Modulation 3RC - $h = 0.7$ . . . . .	65
3.3	Taux d'erreur binaire moyens (hors réalisations catastrophiques) - Modulation 1REC - $h = 0.5$ . . . . .	65
3.4	Pourcentage de $TEB$ supérieurs à 0.05 en l'absence d'égalisation (pire cas)	65
4.1	Pourcentage de fausses détections occasionnées par la méthode cyclique - $h = 0.7$ . . . . .	78
6.1	Taux d'erreur binaire moyens (hors réalisations catastrophiques) - Modulation 3RC - $h = 0.7$ . . . . .	110
6.2	Taux d'erreur binaire moyens (hors réalisations catastrophiques) - Modulation 1REC - $h = 0.5$ . . . . .	110



---

# Bibliographie

- [1] D.N. Godard, "Self recovering equalization and carrier tracking in two dimensional data communications systems," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 28, no. 11, pp. 1867–1875, November 1980.
- [2] S. Houcke, A. Chevreuil, and Ph. Loubaton, "Blind equalization : case of an unknown symbol period," *à paraître dans IEEE Trans. on Signal Processing*.
- [3] S. Houcke, A. Chevreuil, and Ph. Loubaton, "Joint blind equalization and estimation of the symbol period : a contrast function approach," in *Proc. ICASSP*, 2002, vol. 3, pp. III–3053–6.
- [4] C-E. Sundberg, "Continuous phase modulations : a class of jointly power and bandwidth efficient digital modulation schemes," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 24, no. 4, pp. 25–38, April 1986.
- [5] J. Anderson, T. Aulin, and C-E. Sundberg, *Digital Phase Modulation*, Plenum Publishing Compagny, 1986.
- [6] T. Aulin and C-E. Sundberg, "Continuous phase modulation - part i : Full response signaling," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 29, no. 3, pp. 196–206, March 1981.
- [7] T. Aulin, N. Rydbeck, and C-E. Sundberg, "Continuous phase modulation - part ii : Partial response signaling," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 29, no. 3, pp. 210–225, March 1981.
- [8] D.K. Asano, H. Leib, and S. Pasupathy, "Phase smoothing functions for continuous phase modulation," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 42, no. 2-4, Part 2, pp. 1040–1049, 1994.
- [9] F. Xiong, "Modem techniques in satellite communications," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 32, no. 8, pp. 84–98, August 1994.
- [10] I. Sasase and S. Mori, "Multi-h phase coded modulation," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 29, no. 12, pp. 46–56, December 1991.
- [11] P.A. Laurent, "Exact and approximate construction of digital phase modulations by superposition of amplitude modulated pulse," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 34, no. 2, pp. 150–160, February 1986.
- [12] H. Cirpan and M.K. Tsatsanis, "Blind receiver for non linearly modulated signals in multipath," in *Proc. SPAWC*, 1997, pp. 149–152.
- [13] J.G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 1995.
- [14] T.K. Moon, "The expectation-maximization algorithm," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 13, no. 6, pp. 47–60, 1996.
- [15] A. Benveniste, M. Goursat, and G. Ruget, "Robust identification of a nonminimum phase system : blind adjustment of a linear equalizer in data communications," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 25, no. 3, pp. 385–400, June 1980.

- [16] A. Benveniste and M. Goursat, "Blind equalizers," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 32, no. 8, pp. 871–883, August 1984.
- [17] O. Shalvi and E. Weinstein, "New criteria for blind deconvolution of nonminimum phase systems (channels)," *IEEE Trans. on Information theory*, vol. 36, no. 2, pp. 312–321, March 1990.
- [18] Y. Sato, "A method of self-recovering equalization for multilevel amplitude-modulation systems," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 23, pp. 679–682, June 1975.
- [19] J.R. Treichler and B. G. Agee, "A new approach to multipath correction of constant modulus signals," *IEEE Trans. On Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 31, no. 2, pp. 459–472, April 1983.
- [20] C.R. Johnson Jr., P. Schniter, T.J. Endres, J.D. Behm, D.R. Brown, and R.A. Casas, "Blind equalization using the constant modulus criterion : A review," *Proceedings of the IEEE special issue on Blind System Identification and Estimation*, October 1998.
- [21] P.A. Regalia, "On the equivalence between the godard and shalvi-weinstein schemes of blind equalization," *Signal Processing*, vol. 73, no. 1-2, pp. 185–190, 1999.
- [22] G.K. Kaleh and R. Vallet, "Joint parameter estimation and symbol detection for linear or nonlinear unknown channels," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 42, no. 7, pp. 2406–2413, July 1994.
- [23] Hoang Nguyen and B.C. Levy, "Blind ml detection of cpm signals via the emv algorithm," in *Proc. ICASSP*, Orlando, USA, 2002, pp. 2457–2460.
- [24] P. Comon, O. Grelier, and B. Mourrain, "Closed-form blind channel identification with msk inputs," in *Conference Record of Thirty-Second Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 1998, vol. 2, pp. 1569–1573.
- [25] A. Napolitano and C. Spooner, "Cyclic spectral analysis of continuous-phase modulated signals," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 49, no. 1, pp. 30–44, January 2001.
- [26] C. Le Martret and D. Boitea, "Score function based totally blind equalizers," in *Proc. ICASSP*, 2000, pp. 428–431.
- [27] J.F. Bercher and C. Vignat, "Estimating the entropy of a signal with applications," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 48, no. 6, pp. 1687–1694, 2000.
- [28] A. Chevreuil and C. Vignat, "Unbiased adaptive equalization : the gaussian kernel contrast functions," in *Conference Record of the Thirty-Third Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, 1999, pp. 539–543.
- [29] I. Fijalkow, C. Manlove, and C.R. Johnson, "Adaptive fractionally spaced blind cma equalization : excess mse," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 46, no. 1, pp. 227–231, January 1998.
- [30] Z. Ding, R. Kennedy, B. Anderson, and C. Richard Johnson, "Ill convergence of godard blind equalizers in data communication systems," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 39, no. 9, pp. 1313–1326, September 1991.
- [31] S. Houcke, *Séparation autodidacte d'un mélange de sources émettant à des débits inconnus et éventuellement différents*, Thèse, Université de Marne-la-Vallée, 2002.
- [32] P. Ciblat, *Quelques problèmes d'estimation relatifs aux télécommunications non-coopératives*, Université de Marne la Vallée. Thèse, 2000.

- [33] L. Mazet, *Egalisation aveugle en milieu non-coopératif*, Université de Marne la Vallée. Thèse, 1999.
- [34] P. Marchand, *Détection et reconnaissance de modulations numériques à l'aide des statistiques cycliques d'ordre supérieur*, Thèse, INPG, Grenoble, 1998.
- [35] A. d'Andrea U. Mengali, *Synchronization Techniques for Digital Receivers*, Plenum Press, 1997.
- [36] G. Vasquez J. Riba, "Parameter estimation of binary cpm signals," in *Proc. ICASSP*, 2001, pp. 2561–2564.
- [37] J.R. Fonollosa and J.A.R. Fonollosa, "Estimation of the modulation index of cpm signals using higher-order statistics," in *Proc. ICASSP*, 1993, vol. 4, pp. 268–271.
- [38] C.L. Nikias J.R. Fonollosa, "Analysis of cpm signals using higher-order statistics," in *Proc. MILCOM*, 1993, vol. 2, pp. 663–667.
- [39] A.P. Dempster, N.M. Laird, and D.B. Rubin, "Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm," *J. Royal Statistical Soc.*, vol. 39, no. 1, pp. 1–38, 1977.
- [40] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley, 1968.
- [41] P.J. Brockwell and R.A. Davis, *Time Series : Theory and Methods*, Springer Series in Statistics, 1991.
- [42] W. Rudin, *Analyse complexe et réelle*, Masson. McGraw-Hill, 1978.
- [43] P. Bianchi, Ph. Loubaton, and F. Sirven, "Non data aided estimation of the modulation index of continuous phase modulations," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 52, no. 10, pp. 2847–2861, October 2004.
- [44] T. Aulin, "Viterbi detection of continuous phase modulated signals, ntc '80.," in *Proc. NTC*, 1980, pp. 14.2/1–7.
- [45] M.J. Gertsman and J.H. Lodge, "Symbol-by-symbol map demodulation of cpm and psk signals on rayleigh flat-fading channels," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 45, no. 7, pp. 788–799, 1997.
- [46] T.A. Schonhoff, "Symbol error probabilities for m-ary cpfsk : Coherent and noncoherent detection," *IEEE Trans. on Communications*, vol. COM-24, pp. 644–662, June 1976.
- [47] R. Balasubramanian, M.P. Fitz, and J.V. Krogmeier, "Optimal and suboptimal symbol-by-symbol demodulation of continuous phase modulated signals," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 46, no. 12, pp. 1662–1668, 1998.
- [48] B. Picinbono, "Polyspectra of ordered signals," *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 45, no. 7, pp. 2239–2252, 1999.
- [49] F.J. Haggmanns, "On optimum detection of linearly filtered cpm signals," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 39, no. 7, pp. 1034–1036, 1991.
- [50] O. Grelier and P. Comon, "Closed-form equalization," in *Proc. SPAWC*, 1999, pp. 219–222.
- [51] S. Houcke, A. Chevreuil, and Ph. Loubaton, "Estimation of the symbol period : the frequency offset case," in *Proc. EUSIPCO*, Toulouse, France, 2002.
- [52] S. Houcke, A. Chevreuil, and Ph. Loubaton, "Blind source separation of a mixture of communication sources with various symbol periods," *IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, vol. E86-A, no. 3, pp. 564–572, 2003.

- [53] S. Vembu, S. Verdu, R. Kennedy, and W. Sethares, "Convex cost function in blind equalisation," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 42, no. 8, pp. 1952, August 1994.
- [54] I. Fijalkow, A. Touzni, and J.R. Treichler, "Fractionally spaced equalization using cma : robustness to channel noise and lack of diversity," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, no. 1, pp. 56–66, January 1997.
- [55] S. Haykin, *Adaptive filter theory*, Prentice Hall, 1991.
- [56] M. Morelli, U. Mengali, and G.M. Vitetta, "Joint phase and timing recovery with cpm signals," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 45, no. 7, pp. 867–876, July 1997.
- [57] A.N. D'Andrea, U. Mengali, and M. Morelli, "Symbol timing estimation with cpm modulation," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 44, no. 10, pp. 1362–1372, October 1996.
- [58] A.N. D'Andrea, A. Ginesi, and U. Mengali, "Frequency detectors for cpm signals," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 43, no. 2/3/4, pp. 1828–1837, 1995.
- [59] J. Riba and G. Vazquez, "Non-data-aided frequency offset and symbol timing estimation for binary cpm : performance bounds," in *Proc. ICASSP*, 2000, vol. 5, pp. 2549–2552.
- [60] P. Bianchi, Ph. Loubaton, and F. Sirven, "Non data aided estimation of the modulation index of continuous phase modulations," *à paraître dans IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Special Issue on advances in Military Wireless Communications*, 2005.
- [61] P. Bianchi, Ph. Loubaton, and F. Sirven, "A non data aided estimator of the modulation index of continuous phase modulations," in *Proc. ICASSP*, Orlando, USA, 2002.
- [62] P. Bianchi, Ph. Loubaton, and F. Sirven, "On the blind equalization of continuous phase modulation using a constant modulus criterion," in *Proc. SPAWC*, Rome, Italy, 2003.
- [63] P. Bianchi, Ph. Loubaton, and F. Sirven, "Estimation aveugle du débit symbole de modulations cpm," in *Proc. GRETSI*, Paris, France, 2003.
- [64] P. Bianchi, Ph. Loubaton, and F. Sirven, "Performances of a non data aided joint estimator of the technical parameters of continuous phase modulated signals," in *Proc. GLOBECOM*, San Francisco, USA, 2003.
- [65] T. Cover and J. Thomas, *Elements of Information Theory*, Wiley, New York, 1991.
- [66] G. P. Tolstov, *Fourier series*, London. Constable, Silverman, Richard a. Edition. New York ; Dover Publication, 1976.
- [67] F. Riesz and B. SZ.-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Académie des Sciences de Hongrie - Paris Gauthier-Villars. New York ; Dover Publication, 1955.